

# PRINCIPIOS BÁSICOS DE LA TEORÍA ECE

## UN NUEVO PARADIGMA DE LA FÍSICA

Myron W. Evans, Horst Eckardt, Douglas W. Lindstrom, Stephen J. Crothers

Traducción: Alex Hill

Junio de 2016.

## Capítulo 8

# Cosmología ECE.

### 8.1 Introducción

La astronomía es una de las ciencias más antiguas, y se ha transformado en un área de estudio muy precisa. Esta ciencia comenzó a desarrollarse como tema de investigación cuando Johannes Kepler comenzó a analizar las observaciones acerca de la órbita de Marte obtenidas por Tico de Brahe, y que resultaron en el desarrollo de tres leyes planetarias, las cuales Newton posteriormente redujo a la ley de la gravitación universal y a la equivalencia entre la masa gravitacional y la masa inercial. La célebre dinámica newtoniana se desarrolló para incluir movimientos rotacionales en marcos de referencia no inerciales, a través de los trabajos de Euler, Bernoulli, Coriolis y otros, y Laplace desarrolló su elegante mecánica celeste. Lagrange desarrolló el tema de la dinámica a partir de una perspectiva diferente, y utilizando conceptos más generales que luego tomó Hamilton para producir las ecuaciones que llevan su nombre y la idea del hamiltoniano. Este último se transformó en la base de la mecánica cuántica. La teoría orbital puede desarrollarse de una manera elegante a través de la idea del lagrangiano y las ecuaciones de Euler Lagrange. Por ejemplo, la conservación del momento angular y las ecuaciones de Euler Lagrange pueden emplearse para demostrar que si la órbita de una masa  $m$  alrededor de una masa  $M$  se observa como poseyendo una forma elíptica, entonces la fuerza entre  $m$  y  $M$  es inversamente proporcional al cuadrado de

la distancia  $r$  entre  $m$  y  $M$ , la célebre ley del cuadrado de la inversa inferida por Newton. El mismo método también produce las tres leyes de movimiento planetario de Kepler. Sin embargo, el método lagrangiano es más general que el de Newton, porque puede permitir el cálculo de la ley de fuerza para cualquier órbita.

En el siglo XVIII y principios del XIX, se creía que las órbitas de todas las masas  $m$  alrededor de una masa  $M$  tenían forma elíptica, con un excelente grado de aproximación, con  $M$  en un foco de la elipse, de manera que se consideró completado al tema, y fue así que  $m$  viajaba siguiendo una trayectoria elíptica. Las órbitas de los planetas podían observarse con precisión, y objetos tales como las galaxias eran desconocidos. De manera que el célebre concepto newtoniano de la gravitación universal se consideraba tan cercano a la perfección como podría desarrollarlo el intelecto humano. La dinámica newtoniana funcionaba para la astronomía y también de regreso en la Tierra. La manzana apócrifa se veía gobernada por la aceleración debida a la gravedad  $g$ . La manzana y la Luna eran gobernadas por la misma ley, la gravitación universal.

Sin embargo, los dioses se sienten ofendidos por la pretensión humana de la perfección, y la órbita de un planeta también presenta precesión, la cual consiste en que un punto de la elipse, tal como su perihelio, se mueve hacia adelante con cada órbita. En la dinámica newtoniana, la órbita elíptica no se mueve hacia adelante si uno considera sólo a  $m$ , a  $M$  y a la fuerza entre las mismas. A partir de observaciones astronómicas precisas llevadas a cabo por antiguos astrónomos, la precesión del perihelio se conocía desde mucho antes de la época de Newton. Durante su época, el siglo XVII, se creía que este efecto era provocado por la atracción gravitacional de otros planetas. Se trata de un efecto muy pequeño, de manera que no se pensaba que se debía a falla alguna en la ley de gravitación universal de Newton. Cuando el intelecto humano desarrolla algo que considera perfecto, no se permite que los datos obstaculicen el camino, y forma parte de la naturaleza humana el amarrarse a una teoría aún cuando los datos experimentales demuestran que la teoría no es del todo correcta. Algunas veces la teoría está completamente equivocada pero siempre ha dado la ilusión de la verdad. La precesión de las órbitas planetarias puede explicarse sin duda, en gran medida, mediante conceptos newtonianos, pero pareciera existir una pequeña parte de la precesión que no puede explicarse así.

Después del experimento de Michelson y Morley, se cambió por completo el tema de la dinámica, y se introdujo el concepto de la relatividad restringida, como se menciona en el Capítulo 1 de este libro. La dinámica newtoniana y lagrangiana se recuperaron como los límites de la relatividad restringida. Sin embargo, la relatividad restringida se limita a la transformación de Lorentz y a una velocidad constante entre marcos de referencia. Con el objeto de considerar fenómenos de aceleración y efectos similares, se volvía necesaria una nueva relatividad. Un nuevo cambio profundo en el pensamiento sucedió cuando Einstein y otros decidieron basar la dinámica en la geometría. Ésta también fue la idea de Kepler, y se remonta a los antiguos griegos, quienes consideraban a la geometría como la belleza misma, o la belleza perfecta. En realidad, esto significa que la transformación de Lorentz deviene la transformación general de coordenadas. No resulta en absoluto claro a la

intuición humana que el espacio habría de convertirse en parte del tiempo, que las tres dimensiones familiares habrían de abandonarse, y que los conceptos conocidos desarrollados por Euclides habrían de ser reemplazados por una geometría diferente. La idea misma de una geometría diferente había sido considerada sólo por algunos pocos matemáticos hasta alrededor de 1905.

Entre los primeros en considerar semejante geometría estuvo Riemann, a principios del siglo XIX, seguido en la década de 1860 por Christoffel. Estos dos eminentes matemáticos desarrollaron el concepto de la métrica y de la conexión. La métrica es un objeto simétrico por definición, pero la conexión no posee una simetría particular en sus dos índices inferiores, del total de tres. Alrededor de cuarenta años después, Ricci y Levi-Civita desarrollaron el concepto de curvatura del espacio para cualquier número de dimensiones, incluyendo el espaciotiempo de cuatro dimensiones, aquel utilizado por la relatividad restringida. En el campo de la física, Noether estaba llevando a cabo un progreso similar, quien vinculó las leyes de conservación de la física a las leyes de simetría. El campo de la física introdujo el tensor del momento de energía canónico, el cual también es simétrico en sus índices. En las matemáticas, alrededor del año 1900, Levi-Civita definió a la conexión de Christoffel como de carácter simétrico. Esto fue un axioma, o hipótesis, no una demostración rigurosa. En 1900 no se sabía que existiera una propiedad fundamental de cualquier espacio matemático en cualquier número de dimensiones, la torsión.

En 1902, Bianchi infirió una identidad en la que una bien definida suma cíclica de tensores de curvatura desaparece. Esto se conoce como la primera identidad de Bianchi, a partir de la cual puede inferirse la segunda identidad de Bianchi. Las dos identidades de Bianchi también se infirieron en ignorancia de la existencia de la torsión, y utilizando una conexión simétrica. Los ingredientes disponibles para Einstein entre 1905 en 1915 fueron, por lo tanto, la segunda identidad de Bianchi y el Teorema de Noether, considerados como principios fundamentales de la geometría y de la física. Procediendo sobre la antigua base de que la geometría hacía la física, Einstein intentó durante una década alcanzar una ecuación de campo que vinculase los dos conceptos. Esto se publicó finalmente en 1915, y afirma que la segunda identidad de Bianchi es proporcional a la derivada covariante del tensor del momento de energía canónica. Con el beneficio de la mirada retrospectiva, esto constituye un procedimiento excesivamente complicado. Mediante el empleo de la Navaja de Ockham, o principio de la simplicidad, se prefiere una teoría más sencilla, y esa teoría es la teoría ECE. Además, la ecuación de campo de Einstein se obtuvo en ignorancia de la existencia de la torsión. De manera que estaba condenada a fracasar cualitativamente, y así lo ha hecho. La curva de velocidad de una galaxia en espiral demuestra que la teoría de Einstein es incorrecta a nivel cualitativo, es decir por completo. La demostración de esta afirmación se incluye más adelante en este capítulo.

Al principio, la ecuación de campo de Einstein parecía lógica, pero una inspección más cuidadosa indica que contiene una suposición efectuada *a priori*, es decir sólo una suposición. Esta es la suposición de la conexión simétrica efectuada por Levi-Civita quince años antes de que apareciera la ecuación de campo. La segunda identidad de Bianchi, utilizada por Einstein, se apoya en una conexión simétrica, de manera que es

matemáticamente correcta si, y sólo si, la torsión es igual a cero. Sin duda, este hecho era completamente desconocido para Einstein, así como para Levi-Civita y Ricci. El procedimiento utilizado en la deducción de la ecuación de campo de Einstein es la reducción de la segunda identidad de Bianchi a la derivada covariante del tensor de Einstein, el cual es simétrico en sus dos índices inferiores, y que está conformado por una combinación del tensor de Ricci y el escalar de Ricci. Desconocido para Einstein y para todos sus contemporáneos, este procedimiento es correcto si y sólo si la torsión es igual a cero. Si la torsión es finita, dicho procedimiento fracasa completamente, tal como se explica en el documento UFT 88 publicado en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us).

La ecuación de campo fue criticada en forma severa e inmediata por Schwarzschild, en una carta a Einstein fechada en diciembre de 1915, tal como ya se explicó anteriormente en este libro. Además de la suposición de una conexión simétrica, hay otros errores en el primer intento de resolución de su ecuación de campo por parte de Einstein. Schwarzschild resolvió la ecuación utilizando una métrica que no contiene una singularidad. De manera que ya se sabía, en 1915, que no existen los hoyos negros ni el *Big Bang*, conceptos que fueron ridiculizados por Einstein y Hoyle independientemente. La fría verdad es que estos conceptos constituyen simples errores matemáticos. Datos experimentales han demostrado muchas veces, y en forma repetida, que no existe el *Big Bang*, y nunca se han descubierto los hoyos negros. Los dogmáticos simplemente afirman su existencia. La confusión se complicó significativamente a través de la introducción de una métrica atribuida falsamente a Schwarzschild. Esta métrica contiene singularidades o infinitos, de manera que por definición debiera de rechazarse como solución válida de la ecuación de campo de Einstein. Las métricas de Schwarzschild, la verdadera (1915), y la falsa, fracasan completamente en el caso de las galaxias en espiral. Este hecho experimental se ha conocido durante sesenta años. Una pléthora de tales métricas ha sido inferida durante un siglo de trabajo sobre la ecuación de campo de Einstein, pero todas ellas fracasan completamente en virtud del fracaso de la ecuación de campo en las galaxias en espiral, y en virtud del hecho de que todas ellas desprecian la torsión (M. W. Evans, S. J. Crothers, H. Eckardt y K. Pendergast, *Criticisms of the Einstein Field Equation*, referido en el Capítulo 1).

La existencia de la torsión constituye una piedra fundamental en la teoría ECE, que se lanzó desde 2003 para reconstruir la relatividad general utilizando una geometría rigurosamente correcta, una que no contiene suposiciones. De manera que resulta esencial demostrar que la torsión no puede descartarse en cualquier geometría válida. En la geometría de Cartan, utilizada en la teoría ECE, la torsión queda definida por la primera ecuación estructural de Maurer Cartan, inferida en la década de 1920. Este procedimiento ya ha sido explicado previamente en este libro, y el fundamento de la cosmología ECE y de la teoría del campo unificado es que la torsión y la curvatura son idénticamente distintos de cero en cualquier geometría válida. La razón es que ambas se generan a través del conmutador de derivadas covariantes actuando sobre cualquier tensor en cualquier espacio de cualquier número de dimensiones. Siempre se generan simultáneamente, y al conmutador siempre produce las dos ecuaciones estructurales de Cartan simultáneamente. El conmutador siempre produce el tensor de torsión como la diferencia entre dos

conexiones antisimétricas, de manera que la antisimetría de la conexión es la antisimetría del conmutador.

Una conexión simétrica produce un conmutador simétrico que desaparece, y una conexión simétrica significa que la torsión desaparece. Esto significa que la curvatura desaparece si lo hace la torsión, porque la torsión y la curvatura siempre se producen simultáneamente a través del conmutador. Un conmutador nulo significa una torsión nula y una curvatura nula, de manera que una conexión simétrica significa una torsión nula Y TAMBIEN una curvatura nula. El procedimiento incorrecto utilizado por la relatividad general einsteiniana es el omitir el tensor de torsión, y suponer que el conmutador produce solamente la curvatura. Esto constituye, en la actualidad, un disparate matemático que se ha vuelto un dogma. El hecho de que la torsión siempre existe significa que la primera y segunda identidades de Bianchi cambian completamente su estructura. La primera identidad de Bianchi deviene la identidad de Cartan, mientras que la segunda identidad de Bianchi deviene la ecuación dada en el Capítulo 1. Estos errores matemáticos resultan obvios en retrospectiva, y se complicaron aún más a través de la ilusión de exactitud de la teoría de Einstein al aplicarla en el Sistema Solar. En la Sección 8.2 se incluye la explicación correcta de la desviación de la luz por causa de la gravitación en términos de la conexión de espín de la teoría ECE, la cual también es capaz de dar una explicación satisfactoria para la curva de velocidad de una galaxia en espiral. Actualmente, tanto la teoría ECE como la de Einstein tienen influencia en el mundo de la ciencia, pero errores obvios y drásticos en el campo de la geometría no pueden permanecer indefinidamente sin que se busque un remedio. El objetivo fundamental de la teoría ECE es el de mejorar sobre las ideas utilizadas por Einstein y sus contemporáneos, ideas que se remontan a Kepler y a los tiempos antiguos.

## 8.2 Teoría ECE de Desviación de la Luz por causa de la Gravitación.

Consideremos, como en el documento UFT 215, la velocidad orbital lineal en coordenadas polares cilíndricas  $(r, \theta)$ :

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (8.1)$$

donde  $\mathbf{e}_r$  y  $\mathbf{e}_\theta$  son los vectores unitarios del sistema polar cilíndrico. El cuadrado de la velocidad es:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2. \quad (8.2)$$

La precesión de una órbita elíptica puede describirse a través de la ecuación:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \cos(x\theta)} \quad (8.3)$$

donde  $x$  posee un valor cercano a la unidad. En esta ecuación,  $\alpha$  es la semi latitud recta y es la excentricidad. Cuando  $x$  adquiere un valor grande, se obtienen algunos resultados matemáticos muy interesantes, el área de estudio de secciones cónicas con precesión que presentan comportamiento fractal, tal como se describe e ilustra en los documentos de la serie UFT publicados en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us). Sin embargo, en astronomía el factor  $x$  es cercano a la unidad para todas las clases de órbitas con precesión, en el Sistema Solar y en sistemas binarios que exhiben las precesiones más grandes. Cuando  $x$  es exactamente igual a uno, se recupera el tema de las secciones cónicas, por ejemplo, la elipse estática, la hipérbola estática y demás.

La cinemática elemental de coordenadas polares planas produce la aceleración:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta. \quad (8.4)$$

Éste es un resultado general conocido, y escrito en varios documentos de la serie UFT. A partir de la Ec. (8.3) de secciones cónicas con precesión

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{x\epsilon}{\alpha} r^2 \operatorname{sen}(x\theta). \quad (8.5)$$

A partir de dinámica lagrangiana, se sabe que el momento angular orbital conservado es:

$$L = mr^2\dot{\theta} = mr^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (8.6)$$

Por lo tanto:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{xL\epsilon}{m\alpha} \operatorname{sen}(x\theta) \quad (8.7)$$

y a partir de la Ec. (8.6):

$$\dot{\theta} = L / mr^2. \quad (8.8)$$

Las derivadas segundas son:

$$\ddot{r} = \frac{x^2 L^2 \epsilon}{m^2 \alpha r^2} \cos(x\theta) \quad (8.9)$$

y:

$$\ddot{\theta} = -\frac{2 L^2 x \epsilon}{m^2 \alpha r^3} \sin(x\theta) \quad (8.10)$$

y la parte dependiente del ángulo de la aceleración desaparece:

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0. \quad (8.11)$$

La parte radial viene dada por:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{x^2 L^2 \epsilon}{m^2 \alpha r^2} \cos(x\theta) - \frac{L^2}{m^2 r^3}. \quad (8.12)$$

A partir de la Ec. (8.3):

$$\cos(x\theta) = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\alpha}{r} - 1 \right) \quad (8.13)$$

y la aceleración de un objeto en órbita es:

$$\mathbf{a} = \left( \frac{L}{m} \right)^2 \left( \frac{(x^2 - 1)}{r^3} - \frac{x^2}{\alpha r^2} \right) \mathbf{e}_r. \quad (8.14)$$

La fuerza se define convencionalmente como:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (8.15)$$



Si no hay precesión entonces:

$$x = 1 \quad (8.16)$$

y la ley de fuerzas se reduce a la ley del cuadrado de la inversa:

$$\mathbf{F} = -\frac{L^2}{m\alpha r^2} \mathbf{e}_r \quad (8.17)$$

Esta es la ley newtoniana del cuadrado de la inversa si:

$$\alpha = \frac{L^2}{MGm^2} \quad (8.18)$$

La misma ley de fuerza se obtiene elegantemente a partir de la dinámica lagrangiana, la cual da la siguiente ecuación para cualquier órbita:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{mr^2}{L} F(r) \quad (8.19)$$

A partir de las Ecs. (8.3) y (8.19):

$$F(r) = \frac{L^2}{M} \left( \frac{x^2 - 1}{r^3} - \frac{x^2}{\alpha r^2} \right) \quad (8.20)$$

que es igual a la Ec. (8.14).

El cuadrado de la velocidad orbital puede, por lo tanto, expresarse como:

$$v^2 = \left( \frac{L}{m\alpha} \right)^2 \left[ \frac{2x^2\alpha}{r} - x^2(1 - \epsilon^2) + \frac{\alpha^2}{r^2} (1 - x^2) \right] \quad (8.21)$$

y cuando

$$x = 1 \quad (8.22)$$

se obtiene la ecuación kepleriana para la velocidad lineal orbital:

$$v^2 \longrightarrow \left(\frac{L}{m\alpha}\right)^2 \left[\frac{2\alpha}{r} - (1 - \epsilon^2)\right] \quad (8.23)$$

verificando así que la teoría es correcta y consistente. A la distancia  $R_0$  de máxima aproximación de  $m$  a  $M$  en una órbita:

$$R_0 = \frac{\alpha}{1 + \epsilon} \quad (8.24)$$

de manera que la Ec. (8.21) deviene:

$$v^2 = \frac{L^2}{R_0 m^2} \left[ \frac{x^2}{\alpha} (1 + \epsilon^2) - \frac{(x^2 - 1)}{R_0} \right] \quad (8.25)$$

y resolviendo para la excentricidad se obtiene:

$$\epsilon = \frac{m^2 \alpha R_0}{L^2 x^2} \left( v^2 - \frac{L^2}{m^2} \frac{(x^2 - 1)}{R_0} \right). \quad (8.26)$$

Esta ecuación puede utilizarse en el problema de determinación del ángulo de desviación de una órbita parabólica de  $m$  alrededor de  $M$ .

La desviación total para una hipérbola, como en el documento UFT 216, es  $2\psi$ :

$$\Delta\psi = 2\psi = 2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{\epsilon} \quad (8.27)$$

donde

$$\psi = \tan^{-1} \frac{a}{b} \quad (8.28)$$

donde  $a$  y  $b$  son los semi ejes mayor y menor. Por lo tanto:

$$\Delta\psi = 2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{\epsilon} = 2 \operatorname{tan}^{-1} \frac{a}{b} \quad (8.29)$$

donde la excentricidad se define mediante:

$$\epsilon = \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right)^{1/2} . \quad (8.30)$$

La semi latitud recta se define mediante:

$$\alpha = \frac{b^2}{a} . \quad (8.31)$$

A la distancia de máxima aproximación de  $m$  a  $M$  en una órbita hiperbólica:

$$R_0 = \frac{\alpha}{1 + \epsilon} \quad (8.32)$$

de manera que:

$$\cos(x\theta) = 1 \quad (8.33)$$

como en la Ec. (8.24).

para ángulos muy pequeños de desviación, tales como el observado en la desviación por el Sol de la luz desde una fuente muy lejana:

$$\operatorname{sen} \psi \sim \psi = \frac{1}{\epsilon} = \left[ \frac{m^2 \alpha R_0}{L^2 x^2} \left( v^2 - \frac{L^2}{m^2} \frac{(x^2 - 1)}{R_0^2} \right) - 1 \right]^{-1} . \quad (8.34)$$

Si  $v$  pudiera medirse experimentalmente, puede calcularse  $m$ . Para la luz,  $v$  es muy cercana a  $c$  y  $m$  es la masa del fotón. Teóricamente, la masa del fotón puede obtenerse de esta forma. En el límite newtoniano:

$$x = 1 \quad (8.35)$$

y

$$\text{sen } \psi \sim \psi = \frac{1}{\epsilon} = \left[ \frac{v^2 m^2 \alpha R_0}{L^2} - 1 \right]^{-1} \quad (8.36)$$

en donde la semi latitud recta newtoniana es

$$\alpha = \frac{L^2}{MGm^2} \quad . \quad (8.37)$$

De manera que se recupera la conocida teoría newtoniana de la desviación orbital:

$$\text{sen } \psi \sim \psi = \frac{1}{\epsilon} = \left( \frac{v^2 R_0}{MG} - 1 \right)^{-1} . \quad (8.38)$$

Nótese que  $m$  se cancela fuera del cálculo en el límite newtoniano, pero no se cancela en la ecuación rigurosa (8.34). Si se supone la velocidad del fotón como igual a  $c$  para todo propósito práctico, es decir muy cercana a  $c$ , entonces

$$\Delta\psi = 2\psi = \frac{2MG}{c^2 R_0} \quad (8.39)$$

con un excelente grado de aproximación. Este es el célebre valor newtoniano para la desviación de la luz por la gravitación.

El valor observado experimentalmente es siempre:

$$\Delta\psi = 2\psi = \frac{4MG}{c^2 R_0} \quad (8.40)$$

con un alto grado de precisión, para la radiación electromagnética que roza cualquier objeto de masa  $M$ . Este valor es el doble del valor newtoniano.

La razón para este célebre resultado no puede hallarse en la teoría llena de errores de Einstein, pero una explicación directa puede encontrarse utilizando los principios descritos en este libro.

Consideremos el formato vectorial de la primera ecuación estructural de Maurer Cartan, incluida aquí con la notación utilizada en el Capítulo 1:

$$\mathbf{T}^a(\text{orb}) = -\nabla q^{a_0} - \frac{\partial \mathbf{q}^a}{\partial t} - \omega^{a_0 b} \mathbf{q}^b + q^{b_0} \omega^{a_b} \quad (8.41)$$

y

$$\mathbf{T}^a(\text{spin}) = \nabla \times \mathbf{q}^a - \omega^{a_b} \times \mathbf{q}^b. \quad (8.42)$$

La hipótesis ECE fundamental se desarrolló para el electromagnetismo, y define el potencial electromagnético en términos de la tétrada:

$$A^a{}_\mu = A^{(0)} q^a{}_\mu. \quad (8.43)$$

Ahora definimos la tétrada del momento lineal:

$$p^a{}_\mu = p^{(0)} q^a{}_\mu \quad (8.44)$$

de una manera análoga, utilizando la prescripción mínima:

$$p^a{}_\mu \rightarrow p^a{}_\mu + e A^a{}_\mu. \quad (8.45)$$

Resulta a partir de las Ecs. (8.41) y (8.44) que la fuerza orbital de la teoría ECE es:

$$\mathbf{F}^a(\text{orb}) = -\nabla \varphi^{a_0} - \frac{\partial \mathbf{p}^a}{\partial t} - \omega^{a_0 b} \mathbf{p}^b + \varphi_{b_0} \omega^{a_b} \quad (8.46)$$

y que la fuerza de espín es:

$$\mathbf{F}^a(\text{spin}) = \nabla \times \mathbf{p}^a - \omega^{a_b} \times \mathbf{p}^b. \quad (8.47)$$

En la teoría de polarización sencilla simplificada:

$$\mathbf{F}(\text{orb}) = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} - \omega_0 \mathbf{p} + \varphi \boldsymbol{\omega} \quad (8.48)$$

y:

$$\mathbf{F}(\text{spin}) = \nabla \times \mathbf{p} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}. \quad (8.49)$$

En el límite no relativista, la conexión de espín desaparece y:

$$\mathbf{F}(\text{orb}) = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}. \quad (8.50)$$

La célebre equivalencia entre masa inercial y masa gravitacional se recupera a partir de la Ec. (8.50), utilizando la ley de antisimetría de la teoría ECE descrita previamente en este libro. De manera que:

$$-\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\nabla\varphi \quad (8.51)$$

y:

$$\varphi = -\frac{mMG}{r} \quad (8.52)$$

donde  $\varphi$  es el potencial gravitacional. Éste se define por directa analogía con el potencial escalar electromagnético  $\varphi_e$  como sigue:

$$p^a_{\mu} = \left( \frac{\varphi^a}{c}, -\mathbf{p}^a \right) \quad (8.53)$$

y

$$A^a_{\mu} = \left( \frac{\varphi_e^a}{c}, -\mathbf{A}^a \right). \quad (8.54)$$

En dinámica newtoniana:

$$\varphi = -\frac{mM G}{r} \quad (8.55)$$

de manera que la fuerza es:

$$F = -\frac{mM G}{r^2} \quad (8.56)$$

y la aceleración debida a la gravedad es:

$$g = -\frac{M G}{r^2} . \quad (8.57)$$

Este resultado, poderoso y preciso, obtenido a través de la teoría ECE, fue inferido por primera vez en el documento UFT 141. La teoría ECE es, por lo tanto, precisa con un grado de una parte en 10 elevado a la potencia 17, la precisión de la demostración experimental de la equivalencia entre la masa inercial y la masa gravitacional. La equivalencia se debe a la geometría de Cartan.

El cálculo de la desviación de la luz por causa de la gravitación procede mediante la aplicación de la ley de antisimetría de la teoría ECE a la Ec. (8.48) para encontrar que:

$$-\nabla\varphi + \omega\varphi = -\frac{d\mathbf{p}}{dt} - \omega_0\mathbf{p} \quad (8.58)$$

en donde se supuso que:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial t} . \quad (8.59)$$

De manera que la fuerza es:

$$\mathbf{F} = 2 \left( -\frac{d\mathbf{p}}{dt} - \omega_0\mathbf{p} \right) = -2 (\nabla\varphi - \omega\varphi) . \quad (8.60)$$

El factor dos en la Ec. (8.60) puede eliminarse sin afectar la física si se asume que:

$$p^a{}_\mu = \frac{p^{(0)}}{2} q^a{}_\mu \quad (8.61)$$

de manera que la fuerza orbital deviene:

$$\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{p}}{dt} - \omega_0\mathbf{p} = -\nabla\varphi - \boldsymbol{\omega}\varphi \quad (8.62)$$

una ecuación que da el principio de equivalencia (8.51) a partir de la desaparición de la conexión de espín. Ahora definimos:

$$\mathbf{p} = p_r\mathbf{e}_r, \quad (8.63)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_r\mathbf{e}_r \quad (8.64)$$

y comparamos las Ecs. (8.20) y (8.62) para encontrar que:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \varphi\omega_r = -\frac{kx^2}{r^2} - \frac{k(1-x^2)\alpha}{r^3}. \quad (8.65)$$

Para pequeñas desviaciones de una órbita newtoniana, como en el caso de recesión planetaria o cualquier precesión observable en astronomía:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{kx^2}{r^2} \quad (8.66)$$

es decir:

$$x \sim 1 \quad (8.67)$$

con un excelente grado de aproximación. A partir de las Ecs. (8.63) y (8.64):

$$\varphi\omega_r = -\frac{k\alpha}{r^3}(1-x^2) \quad (8.68)$$



en una aproximación casi newtoniana. En esta aproximación, se sabe que el potencial gravitacional es:

$$\varphi = -\frac{k}{r} \quad (8.69)$$

de manera que en la conexión de espín puede expresarse en términos de  $x$  como sigue:

$$\omega_r = (1 - x^2) \frac{\alpha}{r} = (1 - x^2) \frac{b^2}{ar^2} . \quad (8.70)$$

Utilizando la Ec. (8.70), la corrección necesaria para producir la Ec. (8.40) a partir de la Ec. (8.39) es:

$$\frac{c^2 R_0}{MG} \rightarrow \frac{c^2 R_0}{MG} + \frac{\alpha}{R_0} \frac{(1 - x^2)}{x^2} . \quad (8.71)$$

Utilizando la Ec. (8.32) se encuentra que:

$$2\psi = 2 \frac{c^2 R_0}{MG} + 2(1 + \epsilon) \frac{(1 - x^2)}{x^2} . \quad (8.72)$$

Experimentalmente:

$$(1 + \epsilon) \frac{(1 - x^2)}{x^2} = \frac{c^2 R_0}{MG} \quad (8.73)$$

y utilizando la Ec. (8.27):

$$\frac{1}{\epsilon} = \text{sen} \left( \frac{\Delta\psi}{2} \right) . \quad (8.74)$$

Para pequeñas desviaciones:

$$\frac{1}{\epsilon} \sim \frac{\Delta\psi}{2} \quad (8.75)$$

de manera que con un excelente grado de aproximación:

$$\left(1 + \frac{2}{\Delta\psi}\right) \left(\frac{1-x^2}{x^2}\right) = \frac{c^2 R_0}{MG} \quad (8.76)$$

Sin embargo, por experimento:

$$\Delta\psi = \frac{4c^2 R_0}{MG}, \quad (8.77)$$

$$x \sim 1,$$

de manera que utilizando la Ec. (8.70):

$$\omega_r = \frac{\Delta\psi}{4} \left(1 + \frac{2}{\Delta\psi}\right)^{-1} \frac{\alpha}{r^2} \quad (8.78)$$

A partir de la Ec. (8.32):

$$\alpha = R_0(1 + \epsilon) = R_0 \left(1 + \frac{2}{\Delta\psi}\right) \quad (8.79)$$

y a partir de las Ecs. (8.78) y (8.79):

$$\omega_r = \frac{\Delta\psi}{4} \frac{R_0}{r^2} \quad (8.80)$$

Esta es una conexión de espín universal que describe todas las desviaciones electromagnéticas respecto de cualquier objeto relevante  $M$  en el universo. Esta conexión de espín también describe precesión planetaria a través de su relación con  $x$ , la Ec. (8.70). Un ejemplo a escala cósmica es la precesión del pulsar Hulse-Taylor, la Fig. 8.1. El procedimiento utilizado para producir este resultado también da el principio de equivalencia. Finalmente, a la distancia de máxima aproximación:

$$\omega_r = \frac{\Delta\psi}{4R_0} \quad (8.81)$$

un resultado muy sencillo que puede tabularse en astronomía para cualquier objeto relevante de masa  $M$ .

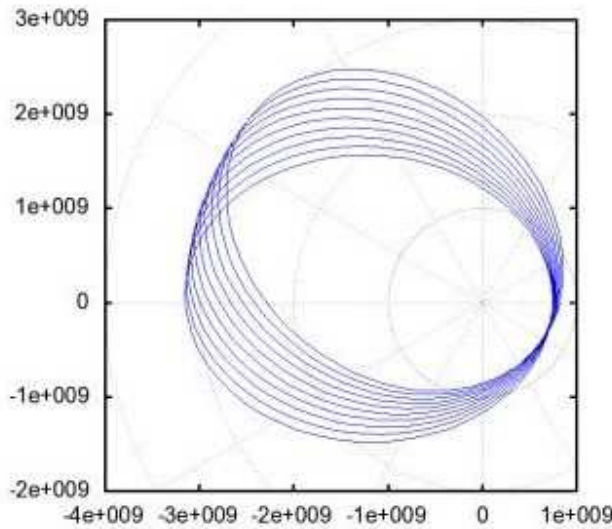


Figura 8.1: Órbita calculada del pulsar Hulse-Taylor.  
 $(\alpha = 1.207718 \cdot 10^9 \text{ m}, \epsilon = 0.617131, x = 1.0117)$ .

### 8.3 La Curva de Velocidad de una Galaxia en Espiral.

Las galaxias en espiral son objetos conocidos en cosmología y poseen una estructura muy compleja. Sin embargo, existe una característica que les vuelve útiles para el estudio de las teorías fundamentales de la cosmología, tales como la de Newton, la de Einstein, y ECE, y ésta es la curva de velocidad, la representación gráfica de la velocidad de una estrella en órbita alrededor del centro de la galaxia vs. la distancia entre la estrella y el centro. Se descubrió experimentalmente a fines de la década de 1950, que la velocidad se vuelve constante a medida que  $r$  se proyecta al infinito. La primera parte de esta sección incluirá la cinemática básica de la órbita y demostrará que tanto la teoría de Newton como la de Einstein fracasan completamente en la descripción de la curva de velocidad. La segunda parte describirá cómo la teoría ECE da una explicación plausible de la curva de velocidad sin el empleo de empirismo aleatorio, tal como la *materia oscura*. Pareciera que la teoría de

la materia oscura ha sido refutada experimentalmente, dejando a la cosmología ECE como la única explicación. Consideremos el vector radial en el plano de cualquier órbita:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \quad (8.82)$$

donde  $\mathbf{e}_r$  es el vector unitario radial. La velocidad de un objeto de masa  $m$  en órbita se define como:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \quad (8.83)$$

porque en coordenadas polares planas el vector unitario  $\mathbf{e}_r$  es una función del tiempo, de manera que aplica el teorema de Leibnitz. El sistema cartesiano, los vectores unitarios  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  no son funciones del tiempo. Los vectores unitarios del sistema polar plano se definen mediante:

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad (8.84)$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \quad (8.85)$$

y se deduce entonces que:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta = \omega \mathbf{e}_\theta \quad (8.86)$$

tal como se describe en el documento UFT 236. La velocidad en un plano es, por lo tanto:

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + \omega r \mathbf{e}_\theta = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (8.87)$$

en donde el vector de velocidad angular:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{k} \quad (8.88)$$

es la conexión de espín de Cartan, tal como se demuestra en el documento UFT 235,

publicado en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us) . Por lo tanto, esta conexión de espín se relaciona con la conexión de espín universal en la Sección 8.2, dando una cosmología coherente para el Sistema Solar y las galaxias en espiral. Tal como habremos de demostrar, las teorías de Newton y Einstein fracasan completamente en esta tarea.

Utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (8.89)$$

se descubre que la velocidad se define para cualquier órbita mediante:

$$v^2 = \omega^2 \left( \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right) \quad (8.90)$$

y por lo tanto se define por la velocidad angular o magnitud de la conexión de espín:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \quad (8.91)$$

La órbita misma se define mediante  $dr/d\theta$ , porque cualquier órbita plana se define mediante  $r$  como una función de  $\theta$ . El momento angular para cualquier órbita plana se define mediante:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (8.92)$$

y su magnitud es:

$$L = mr^2\omega. \quad (8.93)$$

Por lo tanto, para cualquier órbita plana:

$$v^2 = \left( \frac{L}{mr} \right)^2 + \left( \frac{L}{mr} \left( \frac{d\theta}{dr} \right) \right)^2 \quad (8.94)$$

y a medida que  $r$  adquiere un valor infinito:

$$r \rightarrow \infty \quad (8.95)$$

la velocidad alcanza el límite:

$$\frac{dr}{d\theta} = \left( \frac{mv_\infty}{L} \right) r^2 \quad (8.96)$$

donde  $v_\infty$  es la velocidad para un valor infinito de  $r$ . En galaxias en espiral  $v_\infty$  es una constante por observación experimental. Por lo tanto:

$$\frac{d\theta}{dr} = \left( \frac{L}{mv_\infty} \right) \frac{1}{r^2} \quad (8.97)$$

y

$$\theta = \frac{L}{mv_\infty} \int \frac{dr}{r^2} = - \left( \frac{L}{mv_\infty} \right) \frac{1}{r} \quad (8.98)$$

que es la ecuación de una órbita en espiral hiperbólica. En el documento UFT 76, publicado en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us), esta órbita de espiral hiperbólica se comparó con la galaxia en espiral observada M101 (ver Fig. 8.2). De manera que puede comprenderse lo esencial de la dinámica galáctica de los principios más sencillos de la cinemática, definiendo la velocidad angular como la conexión de espín de la teoría ECE.

La dinámica newtoniana fracasa completamente para describir este resultado porque produce una sección cónica estática:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \cos \theta} \quad (8.99)$$

con una ley de atracción del cuadrado de la inversa. A partir de la Ec. (8.99):

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\epsilon r^2}{\alpha} \sin \theta \quad (8.100)$$



Figura 8.2: Galaxia en espiral M101 con espirales hiperbólicas ajustadas a los brazos galácticos.

y utilizando este resultado en la Ec. (8.90):

$$v^2 = \omega^2 r^2 \left( 1 + \left( \frac{\epsilon r}{\alpha} \right)^2 \text{sen}^2 \theta \right) \quad (8.101)$$

donde:

$$\text{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{\epsilon^2} \left( \frac{\alpha}{r} - 1 \right)^2 \quad (8.102)$$

De manera que la velocidad newtoniana es:

$$v^2 = \omega^2 r^2 \left( \frac{2\alpha}{r} - \left( \frac{r}{\alpha} \right)^2 (1 - \epsilon^2) \right). \quad (8.103)$$

El semieje mayor de una órbita elíptica se define mediante:

$$a = \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2} \quad (8.104)$$

de manera que la dinámica newtoniana produce:

$$v^2 = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{L}{m} \right)^2 \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) . \quad (8.105)$$

Utilizando la semi latitud recta newtoniana:

$$\alpha = \frac{L^2}{m^2 MG} \quad (8.106)$$

nos da:

$$v^2 = MG \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) . \quad (8.107)$$

Nótese que:

$$\frac{1}{a} = \frac{1 - \epsilon^2}{\alpha} = \frac{1}{r} (1 + \epsilon \cos \theta) (1 - \epsilon^2) \quad (8.108)$$

de manera que la velocidad newtoniana es:

$$v^2(\text{Newton}) = \frac{MG}{r} (2 - (1 - \epsilon^2) (1 + \epsilon \cos \theta)) . \quad (8.109)$$

Se deduce entonces que:

$$v(\text{Newton}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty \quad (8.110)$$

de manera que la teoría fracasa completamente para describir la curva de velocidad de una galaxia en espiral.

La teoría de Einstein no produce mejores resultados porque genera una elipse con precesión, la Ec. (8.3), a partir de la cual:



$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\epsilon x r^2}{\alpha} \text{sen}(x\theta). \quad (8.111)$$

Utilizando la Ec. (8.111) en la Ec. (8.90) se obtiene:

$$v^2 = \left(\frac{L}{mr}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{x\epsilon \text{sen}(x\theta)}{1 + \epsilon \cos(x\theta)}\right)^2\right) \quad (8.112)$$

y nuevamente se encuentra que:

$$v(\text{Einstein}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty \quad (8.113)$$

y la teoría einsteiniana fracasa completamente para describir la dinámica de una galaxia en espiral. Esto deja a la teoría ECE como la única teoría correcta y general de la cosmología. Ésta última puede desarrollarse considerando nuevamente la aceleración en coordenadas polares planas

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta. \quad (8.114)$$

Tal como se demostró en el documento UFT 235, esto puede expresarse como:  $dt^2$

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r = \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (8.115)$$

y

$$(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}. \quad (8.116)$$

La Ec. (8.116) es la aceleración de Coriolis y  $(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}))$  es la aceleración centrífuga. En los documentos de la serie UFT, se demuestra que la aceleración de Coriolis desaparece para todas las órbitas planas (ver la Ec. (8.11)). Utilizando la regla de la cadena puede demostrarse, como en los documentos de la serie UFT, que:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \left(\frac{L}{mr}\right)^2 \left(\frac{dr}{d\theta}\right) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}\right). \quad (8.117)$$

La aceleración centrífuga se define mediante:

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 r \mathbf{e}_r = -\frac{L^2}{m^2 r^3} \mathbf{e}_r \quad (8.118)$$

de manera que la aceleración total se define mediante:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{L}{mr}\right)^2 \left[ \left(\frac{dr}{d\theta}\right) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{1}{r} \right] \mathbf{e}_r \quad (8.119)$$

para todas las órbitas planas.

En esta ecuación:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{d\theta}{dr} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}\right) \quad (8.120)$$

de manera que:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{L}{mr}\right)^2 \left[ \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{1}{r} \right] \mathbf{e}_r \quad (8.121)$$

Nótese ahora que

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r}\right) \frac{dr}{d\theta} \quad (8.122)$$

de manera que:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{d\theta}\right) = -\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{r}\right). \quad (8.123)$$

Por lo tanto, la aceleración es:

$$\mathbf{a} = - \left( \frac{L}{mr} \right)^2 \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) \mathbf{e}_r \quad (8.124)$$

y utilizando la definición de fuerza:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (8.125)$$

que es la Ec. (8.19), deducida a partir de la dinámica lagrangiana. Este análisis de cualquier órbita plana es, por lo tanto, rigurosamente consistente.

El método lagrangiano para deducir la Ec. (8.125), establece el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} mv^2 - U \quad (8.126)$$

en donde la velocidad se define mediante:

$$v^2 = \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2. \quad (8.127)$$

La fuerza se deduce a partir de la energía potencial, como sigue:

$$F = - \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (8.128)$$

Las dos ecuaciones de Euler Lagrange son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) \quad (8.129)$$

y el momento angular se define mediante el lagrangiano como una constante de movimiento:

$$L = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{constante} \quad (8.130)$$

La Ec. (8.124) es el resultado de cinemática pura en un plano, y también es una ecuación de la geometría de Cartan. Es el resultado de la expresión fundamental para la aceleración en un plano. La Ec. (8.124) también es una ecuación de la geometría de Cartan, porque la conexión de espín es la velocidad angular. La derivada covariante de Cartan puede definirse para su empleo en la cinemática clásica en el espacio tridimensional. Para cualquier vector  $\mathbf{V}$ , la derivada covariante es:

$$\frac{D\mathbf{V}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{\text{ejes fijos}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \quad (8.131)$$

donde el vector de conexión de spin es la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ . En coordenadas polares planas definimos:

$$\mathbf{V} = V\mathbf{e}_r \quad (8.132)$$

por simplicidad de desarrollo. La velocidad se define entonces mediante:

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (8.133)$$

donde:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{ejes fijos}} \quad (8.134)$$

Por definición:

$$\frac{D\mathbf{r}}{dt} = \frac{D}{dt} (r\mathbf{e}_r) = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \quad (8.135)$$

de manera que:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{ejes fijos}} = \left(\frac{dr}{dt}\right) \mathbf{e}_r \quad (8.136)$$

y

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} . \quad (8.137)$$

La aceleración se define mediante:

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (8.138)$$

donde:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{\text{ejes fijos}} . \quad (8.139)$$

A partir de cinemática fundamental, tal como se describe más arriba:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = (\ddot{r} - \omega^2 r) \mathbf{e}_r + \left(r \frac{d\omega}{dt} + 2 \frac{dr}{dt} \omega\right) \mathbf{e}_\theta \quad (8.140)$$

donde los vectores unitarios del sistema de coordenadas polares planas se definen mediante:

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{k}, \quad (8.141)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta, \quad (8.142)$$

$$\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{k} = \mathbf{e}_r. \quad (8.143)$$

Por lo tanto:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \frac{d^2 r}{d\theta^2} \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{dr}{dt}\right) \mathbf{e}_r . \quad (8.144)$$

A partir de la Ec. (8.133)

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (8.145)$$

de manera que en la Ec. (8.138):

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} \mathbf{e}_r + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\text{ejes fijos}} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (8.146)$$

En esta ecuación:

$$\boldsymbol{\omega} \times \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\text{ejes fijos}} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{e}_r \quad (8.147)$$

de manera que:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{e}_r \right) \quad (8.148)$$

que es la Ec. (8.144), Q. E. D.

Las derivadas covariantes utilizadas en estos cálculos son ejemplos de la derivada covariante de Cartan:

$$D_\mu V^a = \partial_\mu V^a + \omega^a_{\mu b} V^b. \quad (8.149)$$

La conocida aceleración centrípeta:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (8.150)$$

y la aceleración de Coriolis:

$$\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{e}_r \right) \quad (8.151)$$

de originan por el sistema de coordenadas polares planas. Estas aseveraciones no existen en el sistema cartesiano y dependen íntegramente de la existencia de la conexión de espín de Cartan. Tal como ya se demostró, la aceleración de Coriolis desaparece para todas las órbitas planas cerradas y la aceleración se simplifica a:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - \omega^2 r) \mathbf{e}_r = \frac{d^2 r}{dt^2} \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (8.152)$$

Por ejemplo, la aceleración debida a la gravedad es:

$$\mathbf{g} = \frac{d^2 r}{dt^2} \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (8.153)$$

e incluye la aceleración centrípeta:

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 r \mathbf{e}_r. \quad (8.154)$$

La aceleración debida a la gravedad en el sistema polar plano es la suma de  $\mathbf{g}$  en el sistema cartesiano:

$$\mathbf{g}(\text{cartesiana}) = \frac{d^2 r}{dt^2} \mathbf{e}_r \quad (8.155)$$

y la aceleración centrípeta. Para aclarar aún más este punto, consideremos la aceleración de una órbita elíptica o trayectoria elíptica cerrada en el sistema polar plano. Es:  $L^2$

$$\mathbf{a} = - \frac{L^2}{m^2 r^2 \alpha} \mathbf{e}_r \quad (8.156)$$

donde el momento angular es una constante de movimiento y definida por:

$$L = |\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = mr^2 \omega. \quad (8.157)$$

La aceleración debida a la gravedad del movimiento elíptico de una masa  $m$  es:

$$\mathbf{g} = - \frac{L^2}{m^2 r^2 \alpha} \mathbf{e}_r \quad (8.158)$$

en coordenadas polares planas. El resultado newtoniano se recupera utilizando la semi latitud recta:

$$\alpha = \frac{L^2}{MGm^2} \quad (8.159)$$

de manera que:

$$\mathbf{g} = -\frac{MG}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (8.160)$$

La única fuerza presente en el sistema de coordenadas polar plano es:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -\frac{mMG}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (8.161)$$

que es el principio de equivalencia, Q. E. D.

La aceleración en el sistema de coordenadas cartesiano, a partir de la Ec. (8.153), es:

$$\mathbf{a}(\text{cartesiana}) = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (8.162)$$

en la cual la aceleración centrífuga es:

$$-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \omega^2 r \mathbf{e}_r. \quad (8.163)$$

Por lo tanto, en el sistema cartesiano la aceleración producida por la misma trayectoria elíptica es:

$$\left(\frac{d^2 r}{dt^2}\right)_{\text{cartesiana}} \mathbf{e}_r = \left(-\frac{L^2}{m^2 r^2 \alpha} + \omega^2 r\right) \mathbf{e}_r. \quad (8.164)$$

generaliza la teoría newtoniana para dar:

$$\left(\frac{d^2 r}{dt^2}\right)_{\text{cartesiana}} \mathbf{e}_r = \left(-\frac{MG}{r^2} + \frac{L^2}{m^2 r^3}\right) \mathbf{e}_r \quad (8.165)$$



y la conocida fuerza:

$$\mathbf{F} = m \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{\text{cartesiana}} \mathbf{e}_r = - \left( - \frac{mMG}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3} \right) \mathbf{e}_r \quad (8.166)$$

de los libros de texto. A partir de una comparación de las Ecs. (8.161) y (8.166), las fuerzas en los sistemas polar plano y cartesiano son diferentes. Si el marco de referencia es estático con respecto al observador, la fuerza es la de la Ec. (8.166). Si el marco de referencia está rotando con respecto al observador, la fuerza se define a través de la Ec. (8.161).

La forma más sencilla para aproximarse a este análisis es siempre el de calcular la aceleración primeramente en coordenadas polares planas y darse cuenta que un término de la expresión resultante es la aceleración en el sistema cartesiano. Para un observador sobre la Tierra que orbita alrededor del Sol, la expresión relevante es aquella en el marco cartesiano, porque esta última también está fija en la Tierra y no se mueve con respecto al observador. En otras palabras, el observador se encuentra en su propio marco de referencia. Para un observador ubicado en el sol, la expresión relevante es aquella en el sistema polar plano de coordenadas, porque la Tierra rota con respecto al observador fijo ubicado sobre el Sol.

El observador sobre la Tierra experimenta la aceleración centrífuga:

$$- \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \omega^2 r \mathbf{e}_r \quad (8.167)$$

dirigida hacia afuera desde la Tierra. Éste es el origen de la fuerza centrífuga cotidiana. El observador ubicado en el Sol experimenta la aceleración centrípeta:

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 r \mathbf{e}_r \quad (8.168)$$

dirigida hacia el Sol y hacia el observador. Todo el análisis se basa en la conexión de espín y en el hecho de que en el sistema polar plano el marco mismo está rotando y, por ende, generar la conexión de espín por definición.

## 8.4 Descripción de Órbitas con la Ecuación de Fuerza de Minkowski.

En el documento UFT 238, publicado en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us), se adoptó un enfoque completamente nuevo hacia la teoría orbital, utilizando la ecuación de fuerza de Minkowski. Éste es un camino que hubiera tomado la teoría de la relatividad, pero la

cosmología siguió el empleo de la geometría equivocada de Einstein, un tema que recibió el nombre de relatividad general. La ecuación de fuerza de Minkowski es la ecuación de fuerza de Newton con el tiempo propio  $\tau$  en reemplazo del tiempo  $t$ . Esta ecuación fue inferida por Minkowski poco tiempo después de que Einstein introdujera la idea del momento relativista. Puede desarrollarse de esta manera una teoría completamente general de órbitas. Se reduce a la teoría newtoniana pero nunca a la teoría einsteiniana. La dinámica newtoniana nunca da ninguna de las fuerzas que se generan, como se comentó en la Sección 8.3, mediante el empleo de coordenadas polares planas y un sistema de coordenadas en rotación. Resulta que la parte espacial de la 4-fuerza de Minkowski genera propiedades nuevas e inesperadas que pueden evaluarse experimentalmente.

La ley de fuerza relativista y las órbitas relativistas de la ecuación de Minkowski pueden obtenerse considerando la velocidad relativista en coordenadas polares planas:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \gamma \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \quad (8.169)$$

donde  $\tau$  es el tiempo propio y  $\gamma$  es el factor de Lorentz:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (8.170)$$

La aceleración relativista es:

$$\mathbf{a} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left( \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \gamma \frac{d}{dt} \left( \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right). \quad (8.171)$$

Utilizando el Teorema de Leibnitz:

$$\mathbf{a} = \gamma \left( \frac{d\gamma}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \gamma \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \right). \quad (8.172)$$

La velocidad  $v$  que aparece en el factor de Lorentz se define mediante el elemento lineal infinitesimal:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \quad (8.173)$$

donde:

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = v^2 dt^2. \quad (8.174)$$

Por lo tanto

$$c^2 d\tau^2 = c^2 - v^2 dt^2 \quad (8.175)$$

y el factor de Lorentz es:

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (8.176)$$

En coordenadas polares planas:

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (8.177)$$

Por lo tanto:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \quad (8.178)$$

El vector radial en coordenadas polares planas es:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \quad (8.179)$$

por lo tanto, la velocidad no relativista es:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + \omega r \mathbf{e}_\theta \\ &= \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \left(\frac{L_0}{m}\right) \left(\frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r}\right) \mathbf{e}_r\right). \end{aligned} \quad (8.180)$$

Para una partícula con masa  $m$  en una órbita, su momento relativista es:

$$\mathbf{p} = \gamma m \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}, \quad (8.181)$$

una ecuación que puede reordenarse como sigue:

$$p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \gamma^2 m^2 c^4 - m^2 c^4 \quad (8.182)$$

dando así la ecuación de energía de Einstein:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \quad (8.183)$$

en donde

$$E = \gamma m c^2 \quad (8.184)$$

es la energía total y

$$E_0 = m c^2 \quad (8.185)$$

es la energía en reposo. El momento angular total relativista es:

$$L = m r^2 \frac{d\theta}{d\tau} = \gamma L_0. \quad (8.186)$$

El concepto de la ecuación de fuerza de Minkowski utiliza la aceleración, de manera que éste es un nuevo enfoque plausible para todas las órbitas. La ecuación de energía de Einstein puede deducirse a partir del elemento lineal infinitesimal (8.173) y desarrollarse como:

$$\begin{aligned} m c^2 &= m c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 \\ &= \gamma^2 m c^2 - \left(\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2\right) = \frac{E^2}{m c^2} - \frac{p^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (8.187)$$

De manera que

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \quad (8.188)$$

Q. E. D. El momento lineal relativista en la Ec. (8.187) es:

$$p^2 = m^2 \left( \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 \right) \quad (8.189)$$

que es la Ec. (8.181), Q. E. D. La definición de la aceleración relativista es:

$$\mathbf{a} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right) = \gamma \left( \frac{d\gamma}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \gamma \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \right) \quad (8.190)$$

en donde:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{dr}{d\tau} \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (8.191)$$

y:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right) = \frac{d^2 r}{dt^2} \mathbf{e}_r + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (8.192)$$

Utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dv} \frac{dv}{dt} \quad (8.193)$$

donde  $v$  es la velocidad del factor de Lorentz definida en la Ec. (8.176). Por lo tanto:

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{d}{dv} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} = \gamma^3 \frac{v}{c^2} \quad (8.194)$$

y en coordenadas polares planas:

$$\mathbf{a} = \gamma^4 \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \gamma^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{d\gamma}{d\tau} \frac{dr}{dt} + \gamma^2 \frac{d^2r}{dt^2} \right) \mathbf{e}_r + \gamma^2 \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\gamma}{d\tau} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\
&\quad + \gamma^2 \left( \frac{d\gamma}{d\tau} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{dr}{dt} \right) \mathbf{e}_r.
\end{aligned} \tag{8.195}$$

En coordenadas cartesianas estáticas, por otro lado:

$$\mathbf{a} = \frac{d}{d\tau} \left( \gamma \frac{dr}{dt} \right) = \gamma \frac{d\gamma}{dt} \frac{dr}{dt} + \gamma^2 \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dr}{dt} \right) \tag{8.196}$$

de manera que:

$$\mathbf{a}_{(\text{cartesiana})} = \left( \gamma \frac{d\gamma}{dt} \frac{dr}{dt} + \gamma^2 \frac{d^2r}{dt^2} \right) \mathbf{e}_r \tag{8.197}$$

en donde:

$$v = \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt}, \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma^3 \frac{v}{c^2} \tag{8.198}$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{d\gamma}{dv} \frac{dv}{dt} = \gamma^3 \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt}. \tag{8.199}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{a}_{(\text{cartesiana})} = \left( \gamma^4 \frac{v^2}{c^2} + \gamma^2 \right) \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_r \tag{8.200}$$

en donde:

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2}. \tag{8.201}$$

Por lo tanto, la aceleración cartesiana es:

$$\mathbf{a}(\text{cartesiana}) = \gamma^4 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \mathbf{e}_r. \quad (8.202)$$

Utilizando la Ec. (8.202) en la Ec. (8.195):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\text{plano polar}) &= \gamma^4 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \mathbf{e}_r + \gamma^2 \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &+ \frac{d\gamma}{d\tau} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \gamma^2 \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \mathbf{e}_r \end{aligned} \quad (8.203)$$

que es la expresión para la aceleración relativista en coordenadas polares planas. Puede demostrarse como sigue que la aceleración de Coriolis relativista desaparece para todas las órbitas planas. La expresión general para la aceleración relativista de Coriolis es

$$\mathbf{a}(\text{Coriolis}) = \gamma^2 \left( r \frac{d}{dt} \frac{d\theta}{dt} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (8.204)$$

en donde el momento angular no relativista total es:

$$L_0 = mr^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (8.205)$$

Se deduce entonces que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{L_0}{mr^2} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{L_0}{mr^2} \right) \frac{dr}{dt} = - \frac{2L_0}{mr^3} \frac{dr}{dt} \quad (8.206)$$

de manera que:

$$\mathbf{a}(\text{Coriolis}) = \left( -mr^2 L_0^2 \frac{dr}{dt} + mr^2 L_0^2 \frac{dr}{dt} \right) \mathbf{e}_\theta = \mathbf{0} \quad (8.207)$$

Q.E.D.

Por lo tanto, la aceleración relativista para todas las órbitas planas es:

$$\mathbf{a} = \gamma^4 \frac{d^2 r}{dt^2} \mathbf{e}_r + \gamma^2 \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\gamma}{d\tau} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (8.208)$$

La componente centrípeta relativista de esta órbita es:

$$\mathbf{a}_{(\text{centrípeta})} = \gamma^2 \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = - \frac{L^2}{mr^3} \mathbf{e}_r. \quad (8.209)$$

En la Ec. (8.208):

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma \frac{d\gamma}{dv} \frac{dv}{dt} = \frac{\gamma^4}{c^2} v \frac{dv}{dt} = \frac{\gamma^4}{c^2} \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} \quad (8.210)$$

y por lo tanto la aceleración deviene:

$$\mathbf{a} = \gamma^4 \frac{d^2 r}{dt^2} \mathbf{e}_r - \frac{L^2}{mr^3} \mathbf{e}_r + \frac{\gamma^4}{c^2} \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} \omega r \mathbf{e}_\theta \quad (8.211)$$

en donde el momento angular total relativista es

$$L = \gamma L_0 = mr^2 \frac{d\theta}{d\tau} = \gamma mr^2 \omega. \quad (8.212)$$

La ley de fuerzas relativista es, por lo tanto, la masa  $m$  multiplicada por la aceleración relativista:

$$\mathbf{a} = \left( \gamma^4 \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{mr^3} \right) \mathbf{e}_r + \frac{\gamma^4}{c^2} \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (8.213)$$

en donde:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega r \mathbf{e}_\theta. \quad (8.214)$$

Esta ecuación puede transformarse a un formato donde la fuerza relativista puede calcularse



a partir de la observación de cualquier órbita plana. El resultado es la generalización relativista de la Ec. (8.124).

Consideremos la aceleración relativista:

$$\mathbf{a} = \gamma^4 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \mathbf{e}_r + \gamma^2 \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\gamma}{d\tau} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (8.215)$$

en donde el momento relativista es:

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}. \quad (8.216)$$

Se obtiene entonces que:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = - \left( \frac{L}{\gamma m r} \right)^2 \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (8.217)$$

y que:

$$\mathbf{a} = - \left( \left( \frac{\gamma L}{m r} \right)^2 \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{L^2}{m r^3} \right) \mathbf{e}_r + \frac{\gamma^4}{c^2} \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} \omega r \mathbf{e}_\theta. \quad (8.218)$$

También se obtiene, como en el documento UFT 238 que:

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{L}{m \gamma} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (8.219)$$

de manera que la generalización relativista requerida de la Ec. (8.124) es:

$$\mathbf{a} = - \left( \left( \frac{L}{m r} \right)^2 \left( \gamma^2 \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) \right) \mathbf{e}_r + \frac{L^4}{m^4 c^2 r^3} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) \mathbf{e}_\theta. \quad (8.220)$$

Para los propósitos de gráficas y animación, es conveniente expresar el factor de Lorentz en términos del ángulo  $\theta$ . El resultado, como se obtuvo en documento UFT 238, es:

$$v^2 = \left(\frac{L_0}{m\alpha}\right)^2 (1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos\theta). \quad (8.221)$$

En resumen, la fuerza relativista para cualquier órbita plana se define mediante:

$$\mathbf{F} = -\frac{L^2}{mr^2} \left( \gamma^2 \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} \right) \mathbf{e}_r + \frac{L^4}{m^4 c^2 r^3} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r}\right) \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r}\right) \mathbf{e}_\theta. \quad (8.222)$$

en donde el factor de Lorentz es:

$$\gamma = 1 - \left(\frac{L_0}{mc}\right)^2 \left( \frac{1}{r^2} + \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r}\right)\right)^2 \right)^{-1/2} \quad (8.223)$$

y en donde el momento angular total relativista es:

$$L = \gamma L_0 = \gamma m r^2 \frac{d\theta}{d\tau} = \gamma m r^2 \omega. \quad (8.224)$$

En las Figs. 8.3 y 8.4, el componente de fuerza radial y angular de una elipse con precesión se representa gráficamente para dos valores de momento angular  $L$ . El factor de precesión fue  $x = 1.1$ . El componente de fuerza angular, que no existe en el caso hamiltoniano, es mucho más pequeño que el componente radial. El componente angular asume ambos signos, lo cual conduce a cero cruzamientos y una dependencia angular diferente que la del componente radial. La asimetría del componente radial aumenta con  $L$ .

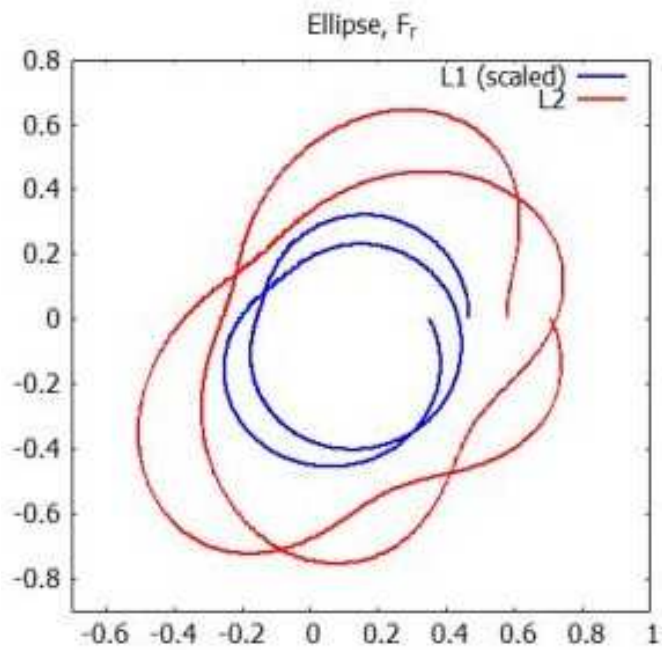


Figura 8.3: Componente de fuerza radial de una elipse con precesión, en coordenadas polares.

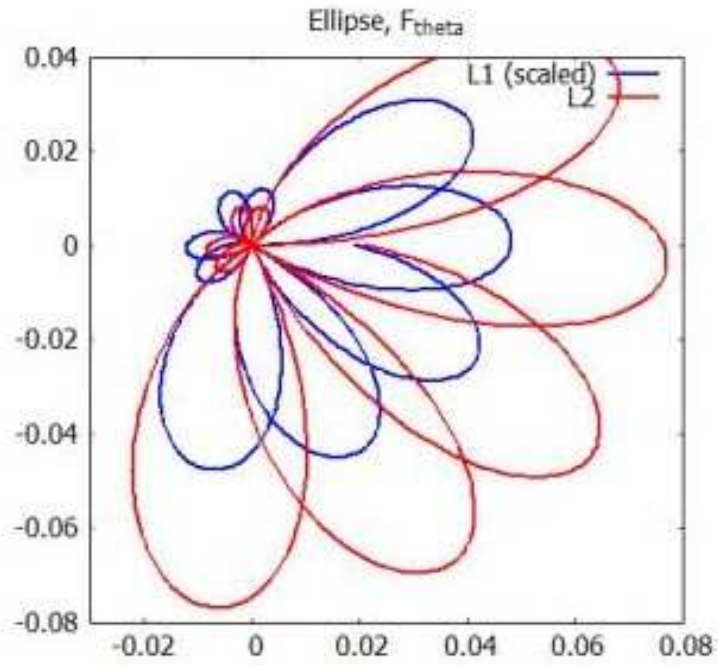


Figura 8.4: Componente de fuerza angular de una elipse con precesión, en coordenadas polares.

# Bibliografía.

## Capítulo 1 y referencias generales.

- [1] M. W. Evans, “*Generally Covariant Unified Field Theory: the Geometrization of Physics*” (Abramis Academic, 2005 al presente), vols.1 a 4, vol. 5 en prep. (Docs 71 a 93 en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us) ).
- [2] L. Felker, “*The Evans Equations of Unified Field Theory*” (Abramis Academic, 2007). Hay traducción al castellano, por Alex Hill, en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us) .
- [3] K. Pendergast, “*Crystal Spheres*” (preimpresión en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us) , Abramis, a publicarse).
- [4] Sección de Omnia Opera en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us) .
- [5] H. Eckardt, “*ECE Engineering Model*”, <http://www.aias.us/documents/miscellaneous/ECE-Eng-Model.pdf>.
- [6] M. W. Evans, (ed.), “*Modern Non-linear Optics*”, una edición especial sobre temas selectos por I. Prigogine y S. A. Rice, “*Advances in Chemical Physics*” (Wiley Interscience, Nueva York, 2001, segunda edición), vols. 119(1) a 119(3).
- [7] M. W. Evans y S. Kielich (eds.), *ibid.*, primera edición (Wiley Interscience, Nueva York, 1992, 1993, 1997), vols. 85(1) a 85(3).
- [8] M. W. Evans y L. D. Crowell, “*Classical and Quantum Electrodynamics and the  $B^{(3)}$  Field*” (World Scientific, 2001).
- [9] M. W. Evans y J.-P. Vigiér, “*The Enigmatic Photon*” (Kluwer, 1994 a 2002), en cinco volúmenes.
- [10] M. W. Evans y A. A. Hasanein, “*The Photomagnetron in Quantum Field Theory*” (World Scientific, 1994).
- [11] M. W. Evans, “*The Photon's Magnetic Field, Optical NMR*” (World Scientific, 1992).
- [12] M. W. Evans, *Physica B*, 182, 227 y 237 (1992).
- [13] S. P. Carroll, “*Spacetime and Geometry, an Introduction to General Relativity*” (Addison Wesley, Nueva York, 2004), capítulo tres.
- [14] J. B. Marion y S. T. Thornton, “*Classical Dynamics of Particles and Systems*” (Harcourt Brace College Publishers, 1988, tercera edición).
- [15] S. Crothers, documentos y referencias en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us) y documento 93 de la serie UFT de la teoría ECE en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us) .
- [16] P. W. Atkins, “*Molecular Quantum Mechanics*” (Oxford University Press, 1983, 2a edición y subsecuentes ediciones).
- [17] J. R. Croca, “*Towards a Non-linear Quantum Physics*” (World Scientific, 2001).
- [18] E. G. Milewski (Chief Editor), “*The Vector Analysis Problem Solver*” (Research and Education Association, Nueva York, 1987, impresión revisada).
- [19] J. D. Jackson, “*Classical Electrodynamics*” (Wiley, Nueva York, 1999, tercera edición).
- [20] M. W. Evans, *Acta Phys. Polonica*, 38, 2211 (2007).
- [21] M. W. Evans y H. Eckardt, *Physica B*, 400, 175 (2007).

[22] M. W. Evans, *Physica B*, 403, 517 (2008).

[23] Michael Krause (Director), "All About Tesla" (une película disponible en DVD que se estrenó en 2007).

## Capítulo 2

[24] L. H. Ryder, "*Quantum Field Theory*" (Cambridge University Press, 1996, 2a ed.).

[25] M. W. Evans, Series Editor de la Serie, "*Contemporary Chemical Physics*" (World Scientific).

## Capítulo 3

[26] Tadeusz Iwaniec, Gaven Martin: The Beltrami equation. En: *Memoirs of the American Mathematical Society. Band 191, Nr. 893, 2008.*

[27] D. Reed, "Beltrami-Trkalian Vector Fields in Electrodynamics" en M. W. Evans y S. Kielich, Eds., "*Modern Nonlinear Optics*" (Wiley, Nueva York, 1992, 1993, 1997, 2001) en seis volúmenes y dos ediciones, vols. 85 y 119 de "*Advances in Chemical Physics*".

[28] G. E. Marsh, "*Force-Free Magnetic Fields*", World Scientific, Singapore, 1994.

[29] S. Venkat et al., "*Realistic Transverse Images of the Proton Charge and Magnetic Densities*", NT@UW-10-15, 2010; <http://arxiv.org/pdf/1010.3629v2.pdf>

[30] G. Sardin, "Fundamentals of the Orbital Conception of Elementary Particles and of their Application to the Neutron and Nuclear Structure", *Physics Essays Vol.12, no.2, 1999*; <http://uk.arxiv.org/ftp/hepph/papers/0102/0102268.pdf>

[31] A. Proca, Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs, *J. Phys. Radium* 7, 347 (1936); Sur la théorie du positon, *C. R. Acad. Sci. Paris* 202, 1366 (1936).

[32] Dorin N. Poenaru, Proca Equations of a Massive Vector Boson Field, [www.theory.nipne.ro/poenaru/PROCA/proca\\_rila06.pdf](http://www.theory.nipne.ro/poenaru/PROCA/proca_rila06.pdf)

## Capítulo 4

[33] M. W. Evans y H. Eckardt, documento UFT160, [www.aias.us](http://www.aias.us) .

[34] P. L. Joliette y N. Rouze, *Am. J. Phys.*, 62, 266 (1994).

[35] M. W. Evans, "Magnetization of an electron plasma by microwave pulses: Faraday

- induction”, *Foundations of Physics Letters*, Volume 8, Issue 4, pp 359-364 (1995).
- [36] H. Eckardt y D. W. Lindstrom, papers on [www.aias.us](http://www.aias.us), sección Publications / Electromagnetic ECE Theory.
- [37] A. S. Goldhaber y M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.*, 82, 939 (2010).