

# Capítulo 3

## Teoría ECE y Campos de Beltrami.

### 3.1 Introducción.

Hacia finales del siglo XIX, el matemático italiano Eugenio Beltrami desarrolló un sistema de ecuaciones para la descripción de flujo hidrodinámico en el que el rotacional de un vector es proporcional al vector mismo [26]. Un ejemplo de esto es el empleo del vector velocidad. Por un largo período, esta solución no se empleó fuera del campo de la hidrodinámica, pero en la década de los cincuenta comenzó a ser utilizado por investigadores tales como Alfven y Chandrasekhar en el campo de la cosmología, en específico con galaxias en espiral. El campo de Beltrami, como comenzó a conocerse, se ha observado en vórtices de plasma, y tal como lo comentó Reed [27] es indicativo de un tipo de electrodinámica tal como la ECE. Por lo tanto, este capítulo se refiere a la forma en la que la electrodinámica ECE se reduce a la electrodinámica de Beltrami, y con otras aplicaciones de la electrodinámica de Beltrami, tales como una nueva teoría de la estructura del partón de las partículas elementales. La teoría ECE se basa en la geometría y es ubícua a través de toda la naturaleza en todas las escalas, y también lo es la teoría de Beltrami, la cual puede considerarse como una sub-teoría de la teoría ECE.

### 3.2 Deducción de la Ecuación de Beltrami.

Consideremos la identidad de Cartan en notación vectorial, obtenida en el Capítulo 2:

$$\nabla \cdot \omega^a_b \times \mathbf{q}^b = \mathbf{q}^b \cdot \nabla \times \omega^a_c - \omega^a_b \cdot \nabla \times \mathbf{q}^b. \quad (3.1)$$

En ausencia de un monopolo magnético:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^a_b \times \mathbf{q}^b = 0 \quad (3.2)$$

de manera que:

$$\mathbf{q}^b \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega}^a_b = \boldsymbol{\omega}^a_b \cdot \nabla \times \mathbf{q}^b. \quad (3.3)$$

Asumamos que la conexión de espín es un vector axial dual en su espacio de índice a un tensor antisimétrico:

$$\boldsymbol{\omega}^a_b = \epsilon^a_{bc} \boldsymbol{\omega}^c \quad (3.4)$$

donde  $\epsilon^a_{bc}$  es el tensor unitario totalmente antisimétrico en tres dimensiones. Entonces la Ec. (3.3) se reduce a:

$$\mathbf{q}^b \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega}^c = \boldsymbol{\omega}^c \cdot \nabla \times \mathbf{q}^b. \quad (3.5)$$

Un ejemplo de esto en el electromagnetismo es:

$$\mathbf{A}^{(2)} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega}^{(1)} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot \nabla \times \mathbf{A}^{(2)} \quad (3.6)$$

en la base circular compleja ((1), (2), (3)). El potencial vectorial viene definido por la hipótesis de la teoría ECE:

$$\mathbf{A}^a = A^{(0)} \mathbf{q}^a. \quad (3.7)$$

A partir la Ec, (2.76) del Capítulo 2, la condición geométrica para la ausencia de un monopolo magnético es:

$$\boldsymbol{\omega}^a_b \cdot \mathbf{B}^b = \mathbf{A}^b \cdot \mathbf{R}^a_b \text{ (spin)} \quad (3.8)$$

donde la Ec.(2.63) de la curvatura de espín se define mediante:

$$\mathbf{R}^a_b(\text{spin}) = \nabla \times \boldsymbol{\omega}^a_b - \boldsymbol{\omega}^a_c \times \boldsymbol{\omega}^c_b \quad (3.9)$$

y donde  $\mathbf{B}^a$  es el vector de densidad de flujo magnético. Utilizando la Ec. (3.4):

$$\mathbf{R}^c(\text{spin}) = \nabla \times \boldsymbol{\omega}^c - \boldsymbol{\omega}^b \times \boldsymbol{\omega}^a. \quad (3.10)$$

En la base circular compleja definida por la Ec. (3.6), las curvaturas de espín son:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(1)}(\text{spin}) &= \nabla \times \boldsymbol{\omega}^{(1)} + i \boldsymbol{\omega}^{(3)} \times \boldsymbol{\omega}^{(1)} \\ \mathbf{R}^{(2)}(\text{spin}) &= \nabla \times \boldsymbol{\omega}^{(2)} + i \boldsymbol{\omega}^{(2)} \times \boldsymbol{\omega}^{(3)} \\ \mathbf{R}^{(3)}(\text{spin}) &= \nabla \times \boldsymbol{\omega}^{(3)} + i \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

y los vectores de densidad de flujo magnético son:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(1)} &= \nabla \times \mathbf{A}^{(1)} + i \boldsymbol{\omega}^{(3)} \times \mathbf{A}^{(1)} \\ \mathbf{B}^{(2)} &= \nabla \times \mathbf{A}^{(2)} + i \boldsymbol{\omega}^{(2)} \times \mathbf{A}^{(2)} \\ \mathbf{B}^{(3)} &= \nabla \times \mathbf{A}^{(3)} + i \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \mathbf{A}^{(3)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

La Ec. (8) puede ejemplificarse mediante:

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{R}^{(2)}(\text{spin}) \quad (3.13)$$

la cual puede desarrollarse como:

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}^{(2)} + i \boldsymbol{\omega}^{(2)} \times \mathbf{A}^{(3)}) \quad (3.14)$$

$$= \mathbf{A}^{(1)} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}^{(2)} + i \boldsymbol{\omega}^{(2)} \times \boldsymbol{\omega}^{(3)}).$$

Posibles soluciones son

$$\boldsymbol{\omega}^{(i)} = \pm \frac{\kappa}{A^{(0)}} \mathbf{A}^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.15)$$

y con el objeto de ser consistente con la solución original [1-10] de  $\mathbf{B}^{(3)}$  se desarrolla el signo negativo:

$$\mathbf{B}^{(3)} = \nabla \times \mathbf{A}^{(3)} - i \frac{\kappa}{A^{(0)}} \mathbf{A}^{(1)} \times \mathbf{A}^{(2)} \quad \text{et cyclicum.} \quad (3.16)$$

A partir de la Ec. (3.2):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^{(3)} \times \mathbf{A}^{(1)} = 0 \quad (3.17)$$

y la siguiente es una identidad del análisis vectorial:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}^{(1)} = 0. \quad (3.18)$$

Una posible solución de la Ec. (3.17) es:

$$\nabla \times \mathbf{A}^{(1)} = i \boldsymbol{\omega}^{(3)} \times \mathbf{A}^{(1)} = -i \frac{\kappa}{A^{(0)}} \mathbf{A}^{(3)} \times \mathbf{A}^{(1)}. \quad (3.19)$$

Análogamente:

$$\nabla \times \mathbf{A}^{(2)} = i \boldsymbol{\omega}^{(2)} \times \mathbf{A}^{(3)} = -i \frac{\kappa}{A^{(0)}} \mathbf{A}^{(2)} \times \mathbf{A}^{(3)}. \quad (3.20)$$

Ahora multiplicamos ambos lados de las ecuaciones base (3.6) a (3.8) del Cap. 2 por

$$A^{(0)2} e^{i\varphi} e^{-i\varphi} \quad (3.21)$$

donde la fase electromagnética es:

$$\varphi = \omega t - \kappa Z \quad (3.22)$$

para hallar la ecuación cíclica:

$$\mathbf{A}^{(1)} \times \mathbf{A}^{(2)} = i A^{(0)} \mathbf{A}^{(3)*} \quad \text{et cyclicum} \quad (3.23)$$

donde:

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}^{(2)*} = A^{(0)} \mathbf{e}^{(1)} e^{i\varphi} = \frac{A^{(0)}}{\sqrt{2}} (\mathbf{i} - i\mathbf{j}) e^{i\varphi}, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{A}^{(3)} = A^{(0)} \mathbf{e}^{(3)} = A^{(0)} \mathbf{k}. \quad (3.25)$$

A partir de las Ecs. (3.23-3.25):

$$\nabla \times \mathbf{A}^{(1)} = \kappa \mathbf{A}^{(1)} \quad (3.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{A}^{(2)} = \kappa \mathbf{A}^{(2)} \quad (3.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{A}^{(3)} = 0 \mathbf{A}^{(3)} \quad (3.28)$$

que son ecuaciones de Beltrami [26], [27].

El análisis anterior puede simplificarse si se considera solamente un componente de los dos componentes conjugados, etiquetados como (1) y (2). Este procedimiento, sin embargo, pierde información en general. Al considerar un componente, la Ec. (3.1) se simplifica a:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = \mathbf{q} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \times \mathbf{q} \quad (3.29)$$

y la suposición de un monopolo magnético igual a cero conduce a:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = 0 \quad (3.30)$$

lo cual implica

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \times \mathbf{q} = \mathbf{q} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega}. \quad (3.31)$$

Procediendo como en la Nota de Acompañamiento 257(7) publicada en la sección UFT del portal [www.aijas.us](http://www.aijas.us), conduce a:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (3.32)$$

donde:

$$\mathbf{R} \text{ (spin)} = \nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (3.33)$$

es el formato simplificado de la curvatura de espín. A partir de las Ecs. (3.31) y (3.32):

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.34)$$

de manera que:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.35)$$

Sin embargo, en la teoría ECE:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (3.36)$$

de manera que las Ecs. (3.35) y (3.36) implican:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (3.37)$$

Por lo tanto, en este modelo simplificado, el vector de conexión de espín es paralelo al potencial vectorial. Estos resultados son consistentes con [1-10]:

$$p^\mu = eA^\mu = \hbar\kappa^\mu = \hbar\omega^\mu \quad (3.38)$$

a partir de la prescripción mínima. De manera que en este modelo simplificado:

$$\omega^\mu = (\omega_0, \boldsymbol{\omega}) = \frac{e}{\hbar}A^\mu = \frac{e}{\hbar}(A_0, \mathbf{A}). \quad (3.39)$$

La fuerza de campo eléctrico se define en el modelo simplificado mediante:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - c\omega_0\mathbf{A} + \varphi\boldsymbol{\omega} \quad (3.40)$$

donde el potencial escalar es

$$\varphi = cA_0. \quad (3.41)$$

A partir de las Ecs. (3.39) y (3.40):

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.43)$$

que es igual a la estructura dada por Heaviside, pero en este caso estas ecuaciones se han deducido a partir de la relatividad general y la geometría de Cartan, mientras que la estructura de Heaviside tiene un origen empírico. Las ecuaciones (3.29) a (3.43), sin embargo, están sobre-simplificadas, porque se deducen considerando uno de dos complejos conjugados, (1) y (2).

Por lo tanto, se deducen empleando álgebra real en lugar de álgebra de números complejos. Pierden el campo  $\mathbf{B}^{(3)}$  y también la resonancia de conexión de espín, desarrollada posteriormente en este libro. En el caso de interacción entre materia y campo, la fuerza de campo eléctrico  $\mathbf{E}$  se sustituye por el desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}$ , y la densidad de flujo magnético  $\mathbf{B}$  por la fuerza de campo magnético  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} - \mathbf{M}), \quad (3.45)$$

donde  $\mathbf{P}$  es la polarización,  $\mathbf{M}$  es la magnetización,  $\epsilon_0$  es la permitividad en el vacío y  $\mu_0$  es la permeabilidad en el vacío. Las cuatro ecuaciones de la electrodinámica para cada uno de los índices (1) o (2) son:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.46)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.48)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.49)$$

donde  $\rho$  es la densidad de carga eléctrica y  $\mathbf{J}$  es la densidad de corriente.

La ley del magnetismo de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.50)$$

implica la ecuación magnética de Beltrami [27]:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \kappa \mathbf{B} \quad (3.51)$$

porque:

$$\frac{1}{\kappa} \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = 0. \quad (3.52)$$

De manera que la ecuación magnética de Beltrami es una consecuencia de la ausencia de un monopolo magnético, y la solución de Beltrami siempre resulta una solución válida.

A partir de las Ecs. (3.49) y (3.51)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \kappa \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.53)$$

y para la magnetostática, o si la corriente de desplazamiento de Maxwell es pequeña:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \kappa \mathbf{J}. \quad (3.54)$$



En este caso, la densidad del flujo magnético es proporcional a la densidad de corriente. A partir de la Ec. 3.51:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{\kappa} \nabla \times \mathbf{J} = \kappa \mathbf{B} \quad (3.55)$$

de manera que

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{\kappa^2} \nabla \times \mathbf{J}. \quad (3.56)$$

Las Ecs. (3.54) y (3.56) implican que la densidad de corriente debe de poseer la estructura:

$$\nabla \times \mathbf{J} = \kappa \mathbf{J} \quad (3.57)$$

con el objeto de producir una ecuación de Beltrami (3.51) en magnetostática. La Ec. (3.54) sugiere que el chorro observado desde el plano de giro de una galaxia en espiral es una solución longitudinal de la ecuación de Beltrami, una corriente  $\mathbf{J}^{(3)}$  asociada con un campo  $\mathbf{B}^{(3)}$ .

En las interacciones entre campo y materia, la ecuación eléctrica de Beltrami:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \kappa \mathbf{E} \quad (3.58)$$

no resulta válida porque no es consistente con la ley de Coulomb:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.59)$$

A partir de las Ecs. (3.58) y (3.59):

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \kappa \quad (3.60)$$

que viola la identidad vectorial:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.61)$$

La ecuación eléctrica de Beltrami:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \kappa \mathbf{E} \quad (3.62)$$

resulta válida para el campo electromagnético libre.

Consideremos las cuatro ecuaciones del campo electromagnético libre:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.63)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (3.64)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.65)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (3.66)$$

Para cada índice de la base circular compleja. Resulta entonces, a partir de las Ecs. (3.64) y (3.66) que:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} \quad (3.67)$$

y:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}. \quad (3.68)$$

Las soluciones para onda de plano transversal son:

$$\mathbf{E} = \frac{E^{(0)}}{\sqrt{2}} (\mathbf{i} - i\mathbf{j}) e^{i\varphi} \quad (3.69)$$

y

$$\mathbf{B} = \frac{B^{(0)}}{\sqrt{2}} (\mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}) e^{i\varphi} \quad (3.70)$$

donde:

$$\varphi = \omega t - \kappa Z \quad (3.71)$$

y donde  $\omega$  es la velocidad angular al instante  $t$  y  $\kappa$  es la magnitud del vector onda en  $Z$ .

A partir de análisis vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.72)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (3.73)$$

y para el campo libre electromagnético las divergencias desaparecen, de manera que obtenemos las ecuaciones de onda de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \mathbf{B} = 0 \quad (3.74)$$

y

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \mathbf{E} = 0. \quad (3.75)$$

Estas son las ecuaciones triaxiales:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \kappa \nabla \times \mathbf{B} = \kappa^2 \mathbf{B} \quad (3.76)$$

y

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \kappa \nabla \times \mathbf{E} = \kappa^2 \mathbf{E}. \quad (3.77)$$

De manera que las soluciones de las ecuaciones de Beltrami también son soluciones de las ecuaciones de onda de Helmholtz. A partir de las Ecs. (3.64), (3.67) y (3.76):

$$-\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\kappa}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \left( -\nabla^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0 \quad (3.78)$$

que es la ecuación de d'Alembert:

$$\mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (3.79)$$

Para una masa finita del fotón, implícita en las soluciones longitudinales del campo electromagnético libre:

$$\hbar^2 \omega^2 = c^2 \hbar^2 \kappa^2 + m_0^2 c^4 \quad (3.80)$$

en cuyo caso:

$$\left( \square + \left( \frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \right) \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (3.81)$$

que es la ecuación de Proca. Esto se dedujo por primera vez en la teoría ECE a partir del postulado de la tetrada de la geometría de Cartan, y se comenta posteriormente en este libro.

A partir de las Ecs. (3.67) y (3.68):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \times \mathbf{B} = -\omega^2 \nabla \times \mathbf{B} \quad (3.82)$$

y:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \times \mathbf{E} = -\omega^2 \nabla \times \mathbf{E}. \quad (3.83)$$

En general:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{i\varphi} = -\omega^2 e^{i\varphi} \quad (3.84)$$

y

$$e^{i\varphi} = e^{i\omega t} e^{-i\kappa Z} \quad (3.85)$$

de manera que la solución general para la ecuación de Beltrami

$$\nabla \times \mathbf{B} = \kappa \mathbf{B} \quad (3.86)$$

también será una solución general de las ecuaciones (3.63) a (3.66) multiplicada por el factor de fase  $\exp(i\omega t)$ .

La teoría ECE puede emplearse para mostrar que la densidad de flujo magnético, el potencial vectorial y el vector de conexión de espín siempre son vectores de Beltrami, con intrincadas estructuras en general, soluciones de la ecuación de Beltrami. La estructura de Beltrami del potencial vectorial se demuestra en la física ECE a partir de la estructura de Beltrami de la densidad de flujo magnético  $\mathbf{B}$ . La parte espacial de la identidad de Cartan también posee una estructura de Beltrami. Si se utiliza álgebra del campo real, la estructura de Beltrami de  $\mathbf{B}$  refuta de inmediato la invariancia gauge  $U^{(1)}$ , porque  $\mathbf{B}$  se vuelve directamente proporcional a  $\mathbf{A}$ . Resulta entonces que la masa del fotón es idénticamente distinta de cero, sea cual fuere su pequeña magnitud. Por lo tanto, no existe el bosón de Higgs en la naturaleza, porque éste es resultado de invariancia gauge  $U^{(1)}$ . La estructura de Beltrami de  $\mathbf{B}$  es resultado directo de la ley del magnetismo de Gauss y de la ausencia de un monopolo magnético. Es difícil concebir por qué la invariancia gauge  $U^{(1)}$  se adoptó alguna vez como teoría, porque su refutación resulta trivial. Una vez descartada la invariancia gauge  $U(1)$ , surge un rico conjunto de nuevas ideas y resultados. La ecuación de Beltrami de la densidad de flujo magnético en la física ECE es:

$$\nabla \times \mathbf{B}^a = \kappa \mathbf{B}^a. \quad (3.87)$$

En el caso más sencillo  $\kappa$  es un vector-onda, pero puede volverse sumamente intrincado.

Combinando la Ec. (3.87) con la ley de Ampere Maxwell de la física ECE:

$$\nabla \times \mathbf{B}^a = \mu_0 \mathbf{J}^a + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}^a}{\partial t} \quad (3.88)$$

la densidad de flujo magnético viene dada directamente por:

$$\mathbf{B}^a = \frac{1}{\kappa} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}^a}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}^a \right). \quad (3.89)$$

Utilizando la ley de Coulomb de la física ECE:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^a = \frac{\rho^a}{\epsilon_0} \quad (3.90)$$

se encuentra que:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^a = \frac{\mu_0}{\kappa} \left( \frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}^a \right) = 0 \quad (3.91)$$

un resultado que se obtiene a partir de:

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (3.92)$$

donde  $c$  es la constante universal conocida como la velocidad de la luz en el vacío. La conservación de la densidad de corriente de carga en la física ECE es:

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}^a = 0 \quad (3.93)$$

de manera que  $\mathbf{B}^a$  siempre es un vector de Beltrami.

En la física simplificada a partir de álgebra en el campo real:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.94)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \kappa \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.95)$$

donde  $\mathbf{A}$  es el potencial vectorial. Las Ecs. (3.94) y (3.95) muestra inmediatamente que en la física  $U^{(1)}$  el potencial vectorial también cumple con una ecuación de Beltrami:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \kappa \mathbf{A}, \quad (3.96)$$

$$\mathbf{B} = \kappa \mathbf{A} \quad (3.97)$$

de manera que en esta teoría simplificada la densidad de flujo magnético es directamente proporcional al potencial vectorial  $\mathbf{A}$ . Se deduce de inmediato que  $\mathbf{A}$  no puede ser invariante gauge  $U^{(1)}$  porque la invariancia gauge  $U^{(1)}$  significa:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \psi \quad (3.98)$$

y si se cambia  $\mathbf{A}$ , entonces cambia  $\mathbf{B}$ . El dogma obsoleto de la física  $U^{(1)}$  afirmaba que la Ec. (3.98) no cambia ninguna cantidad física. Este dogma resulta obviamente incorrecto, porque  $\mathbf{B}$  es una cantidad física, y la Ec. (3.97) la modifica. Por lo tanto, existe una masa finita para el fotón y no existe el bosón de Higgs. La masa finita del fotón y la ecuación de Proca se desarrollan más adelante en este libro, y se resume la teoría aquí por facilidad de referencia. La ecuación de Proca [1-10] puede desarrollarse como:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^a = 0 \quad (3.99)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^a + \frac{\partial \mathbf{B}^a}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (3.100)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^a = \frac{\rho^a}{\epsilon_0} \quad (3.101)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}^a - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}^a}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}^a \quad (3.102)$$

donde la 4-densidad de corriente es:

$$J^{a\mu} = (c\rho^a, \mathbf{J}^a) \quad (3.103)$$

y donde el 4-potencial es:

$$A^{a\mu} = \left( \frac{\varphi^a}{c}, \mathbf{A}^a \right). \quad (3.104)$$

La teoría de Proca afirma que:

$$J^{a\mu} = -\epsilon_0 \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 A^{a\mu} \quad (3.105)$$

donde  $m$  es la masa finita del fotón y  $\hbar$  es la constante reducida de Planck.

Por lo tanto:

$$\rho^a = -\epsilon_0 c^2 \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \varphi^a, \quad (3.106)$$

$$\mathbf{J}^a = -\epsilon_0 c^2 \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \mathbf{A}^a. \quad (3.107)$$

La ecuación de Proca fue inferida a mediados de la década de 1930, pero casi no figura en los libros de texto. Esto constituye un resultado desafortunado del dogma incorrecto, al afirmar que la masa del fotón es igual a cero, a pesar de haber sido postulado por Einstein, alrededor de 1905, como partícula o corpúsculo, tal como lo hizo Newton antes que él. La teoría de Proca  $U^{(1)}$ , en unidades del S.I., es:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{J^\nu}{\epsilon_0} = -\left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 A^\nu. \quad (3.108)$$

Resulta de inmediato que:

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon_0} \partial_\nu J_\nu = -\left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \partial_\nu A^\nu = 0. \quad (3.109)$$

y que:

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (3.110)$$



La Ec. (3.109) equivale a la conservación de densidad de corriente de carga, y la Ec (3.110) es la condición de Lorenz. En la ecuación de Proca la condición de Lorenz no tiene nada que ver con la invariancia gauge. La invariancia gauge U(1) significa que:

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi \quad (3.111)$$

y a partir de la Ec. (3.108) resulta trivialmente aparente que el campo y la densidad de corriente de carga de Proca cambian bajo la transformación (3.111), de manera que no son invariantes gauge, QED. La totalidad del edificio de la electrodinámica U<sup>(1)</sup> se colapsa tan pronto se considera la masa del fotón.

En notación vectorial, la Ec. (3.109) es

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{c\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.112)$$

y

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (3.113)$$

Ahora utilizamos:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad (3.114)$$

y la ley de Coulomb de esta teoría simplificada (sin índice *a*):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.115)$$

para encontrar que:

$$- \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (3.116)$$

que es la ecuación de conservación de corriente de carga:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (3.117)$$

En la teoría de Proca, la Ec. (3.110) implica el gauge de Lorenz como se le conoce en la física establecida:

$$\partial_{\mu} A^{\mu} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (3.118)$$

La ecuación de onda de Proca en el desarrollo usual [31], [32] se obtiene a partir de la definición  $U^{(1)}$  del tensor de campo:

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} \quad (3.119)$$

de manera que

$$\partial_{\mu} (\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}) = \square A^{\nu} - \partial^{\nu} \partial_{\mu} A^{\mu} = - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 A^{\nu} \quad (3.120)$$

En donde

$$\partial_{\mu} A^{\mu} = 0. \quad (3.121)$$

La Ec. (3.121) se obtiene a partir de la Ec. (3.108) en la física de Proca, pero en la física tradicional  $U^{(1)}$ , con una masa de fotón idénticamente igual a cero, el gauge de Lorenz debe estimarse, y es arbitrario. De manera que la ecuación de Proca en el desarrollo tradicional [31], [32] es:

$$\left( \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) A^{\nu} = 0. \quad (3.122)$$

En la física ECE [1-10] la Ec. (3.122) se obtiene a partir del postulado de la tetrada de la geometría de Cartan y deviene:

$$\left( \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) A^a_{\mu} = 0. \quad (3.123)$$

En la física ECE la conservación de la densidad de corriente de carga es:

$$\partial_{\mu} J^{a\mu} = 0 \quad (3.124)$$

y es consistente con las Ecs. (3.48) y (3.49).

En la física ECE la densidad de carga eléctrica es geométrica en origen y es:

$$\rho^a = \epsilon_0 \left( \omega^{a_b} \cdot \mathbf{E}^b - c \mathbf{A}^b \cdot \mathbf{R}^{a_b}(\text{orb}) \right) \quad (3.125)$$

y la densidad de corriente eléctrica es:

$$\mathbf{J}^a = \frac{1}{\mu_0} \left( \omega^{a_b} \times \mathbf{B}^b + \frac{\omega_0}{c} \mathbf{E}^b - \mathbf{A}^b \times \mathbf{R}^{a_b}(\text{spin}) - A^b_0 \mathbf{R}^{a_b}(\text{orb}) \right). \quad (3.126)$$

Aquí,  $\mathbf{R}^{a_b}(\text{spin})$  y  $\mathbf{R}^{a_b}(\text{orb})$  son los componentes de espín y orbital del tensor de curvatura [1-10]. De manera que las Ecs. (3.93), (3.125) y (3.126) dan muchas nuevas ecuaciones de la física que pueden desarrollarse sistemáticamente en trabajos futuros. En el campo de la magnetostática, por ejemplo, las ecuaciones relevantes son:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^a = 0, \quad (3.127)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}^a = \mu_0 \mathbf{J}^a, \quad (3.128)$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^a = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B}^a = 0 \quad (3.129)$$

De manera que se obtiene, a partir de la conservación de corriente de carga, que:

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} = 0. \quad (3.130)$$

Si se supone que el potencial escalar es igual a cero en magnetostática, que es la suposición habitual, entonces:

$$\mathbf{J}^a = \frac{1}{\mu_0} ( \boldsymbol{\omega}^{a_b} \times \mathbf{B}^b - \mathbf{A}^b \times \mathbf{R}^{a_b}(\text{spin}) ) \quad (3.131)$$

porque no hay campo eléctrico presente. Resulta entonces, a partir de las Ecs. (3.129) y (3.131) que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^{a_b} \times \mathbf{B}^b = \nabla \cdot \mathbf{A}^b \times \mathbf{R}^{a_b}(\text{spin}) \quad (3.132)$$

en la magnetostática de la teoría ECE.

En el documento UFT258 y en documentos inmediatamente precedentes de esta serie, se ha demostrado que, en ausencia de un monopolo magnético:

$$\boldsymbol{\omega}^{a_b} \cdot \mathbf{B}^b = \mathbf{A}^b \cdot \mathbf{R}^{a_b}(\text{spin}) \quad (3.133)$$

y que en la parte espacial de la identidad de Cartan, en ausencia del monopolo magnético, se obtienen las dos ecuaciones:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^{a_b} \times \mathbf{A}^b = 0 \quad (3.134)$$

y

$$\boldsymbol{\omega}^{a_b} \cdot \nabla \times \mathbf{A}^b = \mathbf{A}^b \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega}^{a_b}. \quad (3.135)$$

En la física ECE, la densidad de flujo magnético es:

$$\mathbf{B}^a = \nabla \times \mathbf{A}^a - \boldsymbol{\omega}^{a_b} \times \mathbf{A}^b \quad (3.136)$$

de manera que la ecuación de Beltrami da:

$$\nabla \times \mathbf{B}^a = \kappa \mathbf{B}^a = \kappa \nabla \times \mathbf{A}^a - \boldsymbol{\omega}^{a_b} \times \mathbf{A}^b. \quad (3.137)$$

La Ec. (3.134) de la parte espacial de la identidad de Cartan también es una ecuación de Beltrami, como también lo es cualquier ecuación no divergente:

$$\nabla \times \omega^{a_b} \times \mathbf{A}^b = \kappa \omega^{a_b} \times \mathbf{A}^b. \quad (3.138)$$

A partir de la Ec. (3.137):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}^a) - \nabla \times \omega^{a_b} \times \mathbf{A}^b = \kappa \nabla \times \mathbf{A}^a - \omega^{a_b} \times \mathbf{A}^b. \quad (3.139)$$

Utilizando la Ec. (3.138):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}^a) = \kappa \nabla \times \mathbf{A}^a \quad (3.140)$$

lo cual implica que el potencial vectorial también es definido en general por una ecuación de Beltrami:

$$\nabla \times \mathbf{A}^a = \kappa \mathbf{A}^a \quad (3.141)$$

QED. Esto constituye un resultado generalmente válido de la física ECE, que implica que:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}^a = 0. \quad (3.142)$$

A partir de la Ec. (3.110) resulta que:

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} = 0 \quad (3.143)$$

es un resultado general de la física ECE. A partir de las Ecs. (3.135) y (3.141):

$$\nabla \times \omega^{a_b} = \kappa \omega^{a_b} \quad (3.144)$$

de manera que el vector de conexión de espín de la física ECE también queda definido en general por una ecuación de Beltrami. Este importante resultado puede verificarse en forma cruzada, para consistencia interna, utilizando la Nota 258(4) publicada en el portal

[www.aias.us](http://www.aias.us) , comenzando a partir de la Ec.(3.50) de este documento. Considerando la componente X, por ejemplo:

$$\omega^{aXb} (\nabla \times \mathbf{A}^a)_X = A^b_X (\nabla \times \omega^{a_b})_X \quad (3.145)$$

y resulta entonces que:

$$\frac{1}{A^b_X} (\nabla \times \mathbf{A}^{(1)})_X = \frac{1}{\omega^{a(1)}_X} (\nabla \times \omega^{a(1)})_X \quad (3.146)$$

y análogamente para los componentes Y y Z. Para que esto sea una ecuación de Beltrami, las Ecs. (3.141) y (3.144) deben ser ciertas, QED.

En magnetostática hay resultados adicionales que emergen como sigue.

A partir de análisis vectorial:

$$\nabla \cdot \omega^{a_b} \times \mathbf{B}^b = \mathbf{B}^b \cdot \nabla \times \omega^{a_b} - \omega^{a_b} \cdot \nabla \times \mathbf{B}^b \quad (3.147)$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{A}^b \times \mathbf{R}^{a_b}(\text{spin}) = \mathbf{R}^{a_b}(\text{spin}) \cdot \nabla \times \mathbf{A}^a - \mathbf{A}^b \cdot \nabla \times \mathbf{R}^{a_b}(\text{spin}). \quad (3.148)$$

Resulta claro de inmediato que las Ecs. (3.87) y (3.144) dan la Ec. (3.147) en forma auto consistente, QED. La Ec. (3.148) da

$$\nabla \cdot \omega^{a_b} \times \mathbf{B}^b = \nabla \cdot \mathbf{A}^b \times \mathbf{R}^{a_b}(\text{spin}) = 0 \quad (3.149)$$

y utilizando la Ec. (3.148):

$$\nabla \times \mathbf{R}^{a_b}(\text{spin}) = \kappa \mathbf{R}^{a_b}(\text{spin}) \quad (3.150)$$

de manera que la curvatura de espín queda definida por una ecuación de Beltrami en magnetostática.

También en magnetostática:

$$\nabla \times \mathbf{B}^a = \kappa \mathbf{B}^a = \mu_0 \mathbf{J}^a \quad (3.151)$$

de manera que se deduce que la densidad de corriente en magnetostática también queda definida a través de una ecuación de Beltrami:

$$\nabla \times \mathbf{J}^a = \kappa \mathbf{J}^a. \quad (3.152)$$

Todas estas ecuaciones de Beltrami en general poseen estructuras de flujo intrincadas, que se han representado gráficamente en las siguientes secciones de este capítulo, y que se han animado en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us). Tal como se comentó en las Ecs. (3.31) a (3.35) de la Nota 258(5) en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us), estructuras de ondas planas y electrodinámica  $O^{(3)}$  [1-10] también quedan definidas mediante ecuaciones de Beltrami. Estas últimas dan ecuaciones sencillas para ondas planas en el vacío. En otros casos las soluciones se vuelven intrincadas. El campo  $\mathbf{B}^{(3)}$  queda definido por la clase más sencilla de las ecuaciones de Beltrami

$$\nabla \times \mathbf{B}^{(3)} = 0 \mathbf{B}^{(3)}. \quad (3.153)$$

Por lo tanto, en teoría de masa fotónica:

$$\nabla \times \mathbf{A}^a = \kappa \mathbf{A}^a, \quad (3.154)$$

$$\left( \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \mathbf{A}^a = \mathbf{0}. \quad (3.155)$$

Resulta a partir de la Ec. (3.154) que:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}^a = 0 \quad (3.156)$$

de manera que:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}^a) = \kappa \nabla \times \mathbf{A}^a = \kappa^2 \mathbf{A}^a \quad (3.157)$$

produce la ecuación de onda de Helmholtz:

$$\nabla^2 + \kappa^2 \mathbf{A}^a = 0. \quad (3.158)$$

La Ec. (3.155) es

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \mathbf{A}^a = \mathbf{0} \quad (3.159)$$

de manera que:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \kappa^2 + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \mathbf{A}^a = \mathbf{0} \quad (3.160)$$

Ahora utilizamos:

$$\mathbf{p} = \hbar \boldsymbol{\kappa} \quad (3.161)$$

y:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = - \frac{E^2}{\hbar^2} \quad (3.162)$$

para encontrar que la Ec. (3.160) es la ecuación de la energía de Einstein para el fotón con masa  $m$ , de manera que el análisis posee rigurosa consistencia interna, Q.E.D.

En la física ECE, el gauge de Lorenz es:

$$\partial_\mu A^{a\mu} = 0 \quad (3.163)$$

es decir,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi^a}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}^a = 0 \quad (3.164)$$

con la solución:

$$\frac{\partial \varphi^a}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A}^a = 0. \quad (3.165)$$



Esto nuevamente es un resultado general de la física ECE, aplicable bajo todas las circunstancias. También en la física ECE en general, el vector de conexión de espín no posee divergencia:

$$\nabla \cdot \omega^{a_b} = 0 \quad (3.166)$$

porque:

$$\nabla \times \omega^{a_b} = \kappa \omega^{a_b}. \quad (3.167)$$

Otra prueba rigurosa de consistencia interna viene dada por la definición del campo magnético en la física ECE:

$$\mathbf{B}^a = \nabla \times \mathbf{A}^a - \omega^{a_b} \times \mathbf{A}^b \quad (3.168)$$

de manera que:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^a = -\nabla \cdot \omega^{a_b} \times \mathbf{A}^b = 0 \quad (3.169)$$

Por análisis vectorial:

$$\nabla \cdot \omega^{a_b} \times \mathbf{A}^b = \mathbf{A}^b \cdot \nabla \times \omega^{a_b} - \omega^{a_b} \cdot \nabla \times \mathbf{A}^b = 0 \quad (3.170)$$

porque

$$\nabla \times \omega^{a_b} = \kappa \omega^{a_b}, \quad (3.171)$$

$$\nabla \times \mathbf{A}^b = \kappa \mathbf{A}^b, \quad (3.172)$$

y:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}^b = 0, \quad (3.173)$$

$$\nabla \cdot \omega^{a_b} = 0. \quad (3.174)$$

En ausencia de un monopolio magnético, la Ec. (3.84) también resulta a partir de la parte espacial de la identidad de Cartan. De manera que el análisis íntegro posee una rigurosa consistencia interna. La consistencia cruzada de las ecuaciones de Beltrami y ECE puede verificarse empleando:

$$\mathbf{B}^b = \kappa \mathbf{A}^b - \boldsymbol{\omega}^b_c \times \mathbf{A}^c \quad (3.175)$$

como en la Nota 258(1) publicada en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us). La Ec. (3.175) resulta a partir de las Ecs. (3.168) y (3.172). Multiplicamos la Ec. (3.175) por  $\boldsymbol{\omega}^a_b$  y utilizamos la Ec. (3.133) para encontrar:

$$\kappa \boldsymbol{\omega}^a_b \cdot \mathbf{A}^b - \boldsymbol{\omega}^a_b \cdot \boldsymbol{\omega}^b_c \times \mathbf{A}^c = \mathbf{A}^b \cdot \mathbf{R}^a_b \text{ (spin)}. \quad (3.176)$$

Ahora utilizamos:

$$\boldsymbol{\omega}^a_b \cdot \boldsymbol{\omega}^b_c \times \mathbf{A}^c = \mathbf{A}^c \cdot \boldsymbol{\omega}^a_b \times \boldsymbol{\omega}^b_c \quad (3.177)$$

y re-etiquetamos los índices de suma para encontrar que

$$\kappa \boldsymbol{\omega}^a_b \cdot \mathbf{A}^b - \mathbf{A}^b \cdot (\boldsymbol{\omega}^a_c \times \boldsymbol{\omega}^c_b) = \mathbf{A}^b \cdot \mathbf{R}^a_b \text{ (spin)}. \quad (3.178)$$

Resulta entonces que:

$$\mathbf{R}^a_b \text{ (spin)} = \kappa \boldsymbol{\omega}^a_b - \boldsymbol{\omega}^a_c \times \boldsymbol{\omega}^c_b = \nabla \times \boldsymbol{\omega}^a_b - \boldsymbol{\omega}^a_c \times \boldsymbol{\omega}^c_b \quad (3.179)$$

Q.E.D. El análisis produce en forma correcta y consistente la definición correcta de la curvatura de espín.

Finalmente, en el nivel  $U^{(1)}$  y para propósitos de ilustración, consideremos las ecuaciones de Beltrami de la Nota 258(3) publicada en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us):

$$\nabla \times \mathbf{A} = \kappa \mathbf{A} \quad (3.180)$$

y

$$\nabla \times \mathbf{B} = \kappa \mathbf{B} \quad (3.181)$$

en la ley de Ampere Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (3.182)$$

Resulta entonces que:

$$\kappa^2 \mathbf{A} = \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.183)$$

donde:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.184)$$

Por lo tanto

$$\kappa^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (3.185)$$

y empleando la condición de Lorenz:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (3.186)$$

resulta entonces:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (3.187)$$

Utilizando

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (3.188)$$

la Ec. (3.185) deviene la ecuación de d'Alembert en presencia de la densidad de corriente:

$$\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (3.189)$$

Las soluciones de la ecuación de d'Alembert (3.189) pueden hallarse de:

$$\mathbf{B} = \kappa \mathbf{A} \quad (3.190)$$

mostrando de otra manera que, tan pronto se utiliza la ecuación de Beltrami (3.87), queda refutada la invariancia gauge  $U^{(1)}$ .

### 3.3 Electroestática, Resonancia de Conexión de Espín y Estructuras de Beltrami.

Tal como ya se ha comentado, la primera ecuación estructural de Cartan define la fuerza de campo eléctrico como:

$$\mathbf{E}^a = -c \nabla A^a_0 - \frac{\partial A^a}{\partial t} - c\omega^{a_0b} \mathbf{A}^b + cA^{b_0} \omega^{a_b} \quad (3.191)$$

donde el 4-potencial de la electrodinámica ECE viene definido por:

$$A^a_\mu = (A^a_0 - \mathbf{A}^a) = \left( \frac{\varphi^a}{c}, -\mathbf{A}^a \right). \quad (3.192)$$

Aquí,  $\varphi^a$  es el potencial escalar. Si se supone que el tema de la electrostática viene definido por:

$$\mathbf{B}^a = 0, \quad \mathbf{A}^a = 0, \quad \mathbf{J}^a = 0 \quad (3.193)$$

entonces la ley de Coulomb en la teoría ECE viene dada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^a = \boldsymbol{\omega}^{a_b} \cdot \mathbf{E}^b. \quad (3.194)$$

La corriente eléctrica en la teoría ECE viene definida por:

$$\mathbf{J}^a = \epsilon_0 c \left( \omega^{a_{0b}} \mathbf{E}^b - c A^{b_0} \mathbf{R}^{a_b} (\text{orb}) + c \boldsymbol{\omega}^{a_b} \times \mathbf{B}^b - c \mathbf{A}^b \times \mathbf{R}^{a_b} (\text{spin}) \right) \quad (3.195)$$

donde  $\mathbf{R}^{a_b} (\text{spin})$  es la parte de espín del vector de curvatura y donde  $\mathbf{B}^b$  es la densidad de flujo magnético. A partir de las Ecs. (3.193) y (3.195):

$$\mathbf{J}^a = \mathbf{0} = \epsilon_0 c \left( \omega^{a_{0b}} \mathbf{E}^b - c A^{b_0} \mathbf{R}^{a_b} (\text{orb}) \right) \quad (3.196)$$

de manera que en electrostática ECE:

$$\omega^{a_{0b}} \mathbf{E}^b = c A^{b_0} \mathbf{R}^{a_b} (\text{orb}) \quad (3.197)$$

y

$$\mathbf{E}^a = -c \nabla A^{a_0} + c A^{b_0} \boldsymbol{\omega}^{a_b} \quad (3.198)$$

con

$$\nabla \times \mathbf{E}^a = \mathbf{0}. \quad (3.199)$$

A partir de las Ecs. (3.198) y (3.199)

$$\nabla \times \mathbf{E}^a = c \nabla \times (A^{b_0} \boldsymbol{\omega}^{a_b}) \quad (3.200)$$

de manera que obtenemos la restricción:

$$\nabla \times (A^{b_0} \boldsymbol{\omega}^{a_b}) = \mathbf{0}. \quad (3.201)$$

La densidad de carga magnética en la teoría ECE viene dada por:

$$\rho^a_{\text{magn}} = \epsilon_0 \left( c \boldsymbol{\omega}^a_b \cdot \mathbf{B}^b - \mathbf{A}^b \cdot \mathbf{R}^a_b (\text{spin}) \right) \quad (3.202)$$

y la densidad de corriente magnética por:

$$\mathbf{J}^a_{\text{magn}} = \epsilon_0 \left( \boldsymbol{\omega}^a_b \times \mathbf{E}^b - c\omega^a_{0b}\mathbf{B}^b - c \mathbf{A}^b \times \mathbf{R}^a_b (\text{orb}) - A^b_0 \mathbf{R}^a_b (\text{spin}) \right). \quad (3.203)$$

Se piensa que éstas desaparecen a nivel experimental en electromagnetismo, de manera que

$$\boldsymbol{\omega}^a_b \cdot \mathbf{B}^b = \mathbf{A}^b \cdot \mathbf{R}^a_b (\text{spin}) \quad (3.204)$$

y

$$\boldsymbol{\omega}^a_b \times \mathbf{E}^a - c\omega^a_{0b}\mathbf{B}^b - c\mathbf{A}^b \times \mathbf{R}^a_b (\text{orb}) + cA^b_0 \mathbf{R}^a_b (\text{spin}) = \mathbf{0}. \quad (3.205)$$

En electrostática ECE, la Ec. (3.204) se cumple automáticamente porque:

$$\mathbf{B}^b = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}^b = \mathbf{0} \quad (3.206)$$

y la Ec. (3.203) deviene:

$$\boldsymbol{\omega}^a_b \times \mathbf{E}^b + cA^b_0 \mathbf{R}^a_b (\text{spin}) = \mathbf{0}. \quad (3.207)$$

De manera que las ecuaciones de la electrostática ECE son:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}^a = \boldsymbol{\omega}^a_b \cdot \mathbf{E}^b \quad (3.208)$$

$$\omega^a_{0b} \mathbf{E}^b = \varphi^b \mathbf{R}^a_b (\text{orb}) \quad (3.209)$$

$$\boldsymbol{\omega}^a_b \times \mathbf{E}^b + \varphi^b \mathbf{R}^a_b (\text{spin}) = \mathbf{0} \quad (3.210)$$

$$\mathbf{E}^a = -\boldsymbol{\nabla} \varphi^a + \varphi^b \boldsymbol{\omega}^a_b \quad (3.211)$$

Más adelante en este capítulo se muestra que estas ecuaciones conducen a una solución en

términos de funciones de Bessel, pero no así a resonancia de Euler Bernoulli. Con el objeto de obtener resonancia de conexión de espín, la Ec. (3.208) debe de extenderse a:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^a = \boldsymbol{\omega}^a_b \cdot \mathbf{E}^b - c\mathbf{A}^b(\text{vac}) \cdot \mathbf{R}^a_b(\text{orb}) \quad (3.212)$$

donde  $\mathbf{A}^b(\text{vac})$  es el potencial en el vacío de Eckardt Lindstrom [1-10]. El campo eléctrico estático viene definido por:

$$\mathbf{E}^a = -\nabla \varphi^a + \varphi^b \boldsymbol{\omega}^a_b \quad (3.213)$$

de manera que, a partir de las Ecs. (3.212) y (3.213):

$$\nabla^2 \varphi^a + \boldsymbol{\omega}^a_b \cdot \boldsymbol{\omega}^b_c \varphi^c = \nabla \cdot \varphi^b \boldsymbol{\omega}^a_b + \boldsymbol{\omega}^a_b \cdot \nabla \varphi^b + c\mathbf{A}^b(\text{vac}) \cdot \mathbf{R}^a_b(\text{orb}). \quad (3.214)$$

Por la ley de antisimetría ECE:

$$-\nabla \varphi^a = \varphi^b \boldsymbol{\omega}^a_b \quad (3.215)$$

que conduce a la ecuación de resonancia de Euler Bernoulli:

$$\nabla^2 \varphi^a + \boldsymbol{\omega}^a_b \cdot \boldsymbol{\omega}^b_c \varphi^c = \frac{1}{2} c\mathbf{A}^b(\text{vac}) \cdot \mathbf{R}^a_b(\text{orb}) \quad (3.216)$$

y de resonancia de conexión de espín [1-10]. El lado izquierdo de la igualdad contiene el término de la ley de Hooke, mientras que el lado derecho contiene el término impulsor, el cual se origina en el potencial del vacío. Denotamos:

$$\rho^a(\text{vac}) = \frac{\epsilon_0 c}{2} \mathbf{A}^b(\text{vac}) \cdot \mathbf{R}^a_b(\text{orb}) \quad (3.217)$$

de manera que la ecuación deviene:

$$\nabla^2 \varphi^a + (\boldsymbol{\omega}^a_b \cdot \boldsymbol{\omega}^b_c) \varphi^c = \frac{\rho^a(\text{vac})}{\epsilon_0}. \quad (3.218)$$

El lado izquierdo de la Ec. (3.218) es una propiedad de campo, mientras que el lado derecho es una propiedad del vacío ECE. En el caso más sencillo:

$$\nabla^2 \varphi + (\omega_0)^2 \varphi = \frac{\rho(\text{vac})}{\epsilon_0} \quad (3.219)$$

y produce resonancia sin amortiguación si:

$$\rho(\text{vac}) = \epsilon_0 A \cos \omega Z \quad (3.220)$$

donde  $A$  es una constante. La integral en particular de la Ec. (3.219) es:

$$\varphi = (A \cos \omega Z) / ((\omega_0)^2 - \omega^2) \quad (3.221)$$

y la resonancia de conexión de espín se produce en el caso:

$$\omega = \omega_0 \quad (3.222)$$

cuando:

$$\varphi \rightarrow \infty \quad (3.223)$$

y hay un pico de resonancia de fuerza de campo eléctrico del vacío. Más adelante en este capítulo se dan soluciones de la Ec. (3.218) en términos de una combinación de funciones de Bessel, y también un análisis utilizando el potencial del vacío de Eckardt Lindstrom como término impulsor. En ausencia de un monopolo magnético, la identidad de Cartan es, como ya se ha comentado:

$$\nabla \cdot \omega^{a_b} \times \mathbf{A}^b = 0 \quad (3.224)$$

lo cual implica:

$$\omega^{a_b} \cdot \nabla \times \mathbf{A}^b = \mathbf{A}^b \cdot \nabla \times \omega^{a_b}. \quad (3.225)$$

Una posible solución para esta ecuación es:



$$\omega^a_b = \epsilon^a_{bc} \omega^c \quad (3.226)$$

que conduce, como ya se ha comentado, a una justificación rigurosa para la electrodinámica  $O^{(3)}$ . La identidad de Cartan (3.224) es ella misma una ecuación de Beltrami:

$$\nabla \times \omega^a_b \times \mathbf{A}^b = \kappa \omega^a_b \times \mathbf{A}^b. \quad (3.227)$$

A partir de las Ecs. (3.226) y (3.227):

$$\nabla \times \mathbf{A}^c \times \mathbf{A}^b = \kappa \mathbf{A}^c \times \mathbf{A}^b. \quad (3.228)$$

En la base circular compleja:

$$\mathbf{A}^{(1)} \times \mathbf{A}^{(2)} = i A^{(0)} \mathbf{A}^{(3)*} \quad \text{et cyclicum} \quad (3.229)$$

de manera que, a partir de las Ecs. (3.228) y (3.229):

$$\nabla \times \mathbf{A}^{(i)} = \kappa \mathbf{A}^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.230)$$

que son ecuaciones de Beltrami, como se ha discutido previamente en este capítulo. El resultado puede obtenerse con consistencia interna utilizando la ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^a = 0 \quad (3.231)$$

que como ya se ha argumentado, implica la ecuación de Beltrami:

$$\nabla \times \mathbf{B}^a = \kappa \mathbf{B}^a. \quad (3.232)$$

A partir de las Ecs. (3.168) y (3.232):

$$\nabla \times \mathbf{B}^a = \kappa \mathbf{B}^a = \kappa \nabla \times \mathbf{A}^a - \omega^a_b \times \mathbf{A}^b \quad (3.233)$$

de manera que:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}^a) - \nabla \times \boldsymbol{\omega}^{a_b} \times \mathbf{A}^b = \kappa \nabla \times \mathbf{A}^a - \boldsymbol{\omega}^{a_b} \times \mathbf{A}^b \quad (3.234)$$

Utilizando la Ec. (3.227) se obtiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}^a) = \kappa \nabla \times \mathbf{A}^a \quad (3.235)$$

que implica las Ecs. (3.228) a (3.230), Q.E.D. Como ya se mostró previamente en este capítulo, la estructura de Beltrami también gobierna el vector de conexión de espín:

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega}^{a_b} = \kappa \boldsymbol{\omega}^{a_b}. \quad (3.236)$$

Resulta entonces que las ecuaciones:

$$\boldsymbol{\omega}^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{\kappa}{A^{(0)}} \mathbf{A}^{(3)} \quad (3.237)$$

y:

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\kappa}{A^{(0)}} \mathbf{A}^{(2)} \quad (3.238)$$

producen electrodinámica  $O^{(3)}$  [1-10]:

$$\mathbf{B}^{(1)*} = \nabla \times \mathbf{A}^{(1)*} - i \frac{\kappa}{A^{(0)}} \mathbf{A}^{(2)} \times \mathbf{A}^{(3)} \quad \textit{et cyclicum}. \quad (3.239)$$

Como se demuestra en la Nota 259(3), publicada en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us), hay muchas ecuaciones interrelacionadas de la electrodinámica  $O^{(3)}$  que se originan todas ellas a partir de la geometría. Posteriormente en este capítulo se comenta que, una consecuencia de estas conclusiones es que los vectores de la conexión de espín y de la curvatura orbital también cumplen con una estructura de Beltrami. El hecho de que ECE sea una teoría de campo unificado permite el desarrollo e interrelación de varias ecuaciones básicas, incluyendo la definición de  $\mathbf{B}^{(3)}$ :

$$\mathbf{B}^{(3)} = \nabla \times \mathbf{A}^{(3)} - i \frac{\kappa}{A^{(0)}} \mathbf{A}^{(1)} \times \mathbf{A}^{(2)}. \quad (3.240)$$

Puede expresarse como:

$$\mathbf{B} = -i \frac{e}{\hbar} \mathbf{A} \times \mathbf{A}^* = B^{(0)} \mathbf{k} = B_Z \mathbf{k}. \quad (3.241)$$

Aun cuando  $B^{(3)}$  es un campo irradiado y en propagación, como es bien sabido [1-10], la Ec. (3.241) puede utilizarse como una definición general de la densidad de flujo magnético para una selección de potenciales. Esto resulta importante para el tema de la magnetostática y el desarrollo [1-10] de la ecuación del fermión con:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}. \quad (3.242)$$

La Ec. (3.241) da la transición desde la mecánica clásica a la mecánica cuántica. En la electrodinámica ECE,  $\mathbf{A}$  siempre debe de ser un campo de Beltrami y esto es el resultado de la identidad de Cartan, como ya se ha comentado. De manera que es necesario resolver simultáneamente las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{B} = -i \frac{e}{\hbar} \mathbf{A} \times \mathbf{A}^*, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}, \quad \nabla \times \mathbf{A} = \kappa \mathbf{A}. \quad (3.243)$$

Esto puede llevarse a cabo utilizando los principios de relatividad general, de manera que el campo electromagnético es un marco de referencia en rotación y traslación. Por lo tanto, el vector posición es:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^* = \frac{r^{(0)}}{\sqrt{2}} (\mathbf{i} - i\mathbf{j}) e^{i\varphi} \quad (3.244)$$

donde:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(1)}, \quad \mathbf{r}^* = \mathbf{r}^{(2)}, \quad \varphi = \omega t - \kappa Z \quad (3.245)$$

de manera que:

$$\mathbf{r}^{(1)} \times \mathbf{r}^{(2)} = i r^{(0)} \mathbf{r}^{(3)*} \quad \text{et cyclicum.} \quad (3.246)$$

Se deduce entonces que:

$$\nabla \times \mathbf{r}^{(1)} = \kappa \mathbf{r}^{(1)} \quad (3.247)$$

$$\nabla \times \mathbf{r}^{(2)} = \kappa \mathbf{r}^{(2)} \quad (3.248)$$

$$\nabla \times \mathbf{r}^{(3)} = 0 \mathbf{r}^{(3)} \quad (3.249)$$

Los resultados (3.246) para ondas planas pueden generalizarse a cualquier solución de Beltrami, de manera que se concluye que el espaciotiempo mismo posee una estructura de Beltrami. A partir de las Ecs. (3.242) y (3.244):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)} = \frac{r^{(0)}B^{(0)}}{2\sqrt{2}} (\mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}) e^{i\varphi} = \frac{A^{(0)}}{\sqrt{2}} (\mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}) e^{i\varphi} \quad (3.250)$$

donde:

$$A^{(0)} = \frac{1}{2} B^{(0)} r^{(0)} \quad (3.251)$$

y a partir de la Ec. (3.250):

$$\nabla \times \mathbf{A} = \kappa \mathbf{A} \quad (3.252)$$

Q.E.D. Por lo tanto, siempre es posible expresar el potencial vectorial en la forma (3.242) en tanto el espaciotiempo mismo posea una estructura de Beltrami. Esta conclusión vincula varias ramas de la física, porque la Ec. (3.242) se utiliza para producir el factor de Landé, RSE, RMN y demás a partir de la ecuación de Dirac, que deviene la ecuación del fermión [1-10] en la física ECE. Tal como ya se ha comentado, el postulado de la tétrada y el postulado ECE dan:

$$(\square + \kappa^2_0) \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (3.253)$$

y la ecuación del fermión o quiral de Dirac es una factorización de la Ec. (3. 253).

Tal como se demostró en el Capítulo 1:

$$\kappa^2_0 = q^v_a \hat{\partial}^\mu (\omega^a_{\mu\nu} - \Gamma^a_{\mu\nu}) \quad (3.254)$$

where  $q^v_a$  es la inversa de la tétrada, definida por:

$$q^a_\nu q^v_a = 1. \quad (3.255)$$

En formato covariante generalizado, la Ec. (3.253) es:

$$(\square + \kappa^2_0) A^a_\mu = 0 \quad (3.256)$$

y con:

$$A^a_\mu = (A^a_0, -\mathbf{A}^a) \quad (3.257)$$

se deduce que:

$$(\square + \kappa^2_0) A_0 = 0, \quad (3.258)$$

$$(\square + \kappa^2_0) \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (3.259)$$

que da la Ec. (3.254) Q.E.D. El operador de d'Alembert se define como:

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (3.260)$$

La condición de Beltrami:

$$\nabla \mathbf{A} = \kappa \mathbf{A} \quad (3.261)$$

da la ecuación de onda de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (3.262)$$

si:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (3.263)$$

A partir de la Ec. (3.259):

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \kappa_0^2 \right) \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (3.264)$$

de manera que:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + (\kappa_0^2 + \kappa^2) \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (3.265)$$

que es la ecuación para la dependencia de  $\mathbf{A}$  respecto del tiempo. Las ecuaciones de Helmholtz y de Beltrami son para la dependencia espacial de  $\mathbf{A}$ . La Ec. (3.267) se satisface mediante:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \exp(i\omega t) \quad (3.266)$$

donde:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \kappa^2 + \kappa_0^2. \quad (3.267)$$

La Ec. (3.267) es una generalización de la ecuación de la energía de Einstein para una partícula libre:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \quad (3.268)$$

donde:

$$E = \hbar\omega \quad , \quad \mathbf{p} = \hbar\boldsymbol{\kappa} \quad (3.269)$$

utilizando:

$$\kappa^2_0 = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 = q^{\nu}_a \partial^{\mu} (\omega^a_{\mu\nu} - \Gamma^a_{\mu\nu}). \quad (3.270)$$

De manera que la masa, en la teoría ECE, se define mediante geometría.

Por lo tanto, la solución general de la Ec. (3.256) es:

$$A^a_{\mu} = A^a_{\mu}(0) \exp(i(\omega t - \kappa Z)) \quad (3.271)$$

donde:

$$\omega^2 = c^2 \kappa^2 + \kappa^2_0. \quad (3.272)$$

Se deduce que existen las ecuaciones:

$$(\square + \kappa^2_0) \varphi^a = 0 \quad (3.273)$$

y

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \varphi^a = 0 \quad (3.274)$$

donde  $\varphi^a$  es el potencial escalar en la física ECE. Para cada  $a$ :

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \varphi = 0. \quad (3.275)$$

Escribimos ahora:

$$\kappa_0 = \frac{mc}{\hbar} \quad (3.276)$$

donde  $m$  es masa. La ecuación de onda relativista para cada  $a$  es:

$$(\square + \kappa_0^2) \varphi = 0 \quad (3.277)$$

que es el formato cuantizado de:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 = c^2 p^2 + \hbar^2 k^2 c^2. \quad (3.278)$$

La Ec. (3.278) es:

$$E = \gamma m c^2 \quad (3.279)$$

donde el factor de Lorentz es:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (3.280)$$

y donde el momento relativista es:

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}. \quad (3.281)$$

Definimos la energía relativista como:

$$T = E - m c^2 \quad (3.282)$$

y se deduce que:

$$T = (\gamma - 1) m c^2 \rightarrow \frac{1}{2} m v^2 \quad (\text{para } v \ll c) \quad (3.283)$$

que es el límite no relativista de la energía cinética, es decir:

$$T = \frac{p^2}{2m}. \quad (3.284)$$

Utilizando:

$$T = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} = -i\hbar \nabla \quad (3.285)$$



la Ec. (3.284) se cuantiza a la ecuación de Schroedinger para una partícula libre:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi = T\varphi \quad (3.286)$$

que es la ecuación de Helmholtz:

$$\left(\nabla^2 + \frac{2mT}{\hbar^2}\right)\varphi = 0. \quad (3.287)$$

Resulta así que la ecuación de Schroedinger para una partícula libre es una ecuación de Beltrami pero con el potencial vectorial sustituido por el potencial escalar  $\varphi$ , que cumple el papel de función de onda. También resulta en el límite no relativista que:

$$\left(\nabla^2 + \frac{2mT}{\hbar^2}\right)\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (3.288)$$

de manera que:

$$\kappa^2 = \frac{2mT}{\hbar^2}. \quad (3.289)$$

La ecuación de Helmholtz (3.287) puede expresarse como:

$$\left(\nabla^2 + \kappa^2\right)\varphi = 0 \quad (3.290)$$

que es una ecuación de Euler Bernoulli sin un término impulsor del lado derecho de la igualdad. En presencia de la energía potencial  $V$ , la Ec. (3.286) deviene:

$$H\varphi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\varphi = E\varphi \quad (3.291)$$

donde  $H$  es el operador hamiltoniano y  $E$  es la energía total:

$$E = T + V \quad (3.292)$$

La Ec. (3.291) es:

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \varphi = \frac{2mV}{\hbar^2} \varphi \quad (3.293)$$

que es una ecuación inhomogénea de Helmholtz similar a una ecuación de resonancia de Euler Bernoulli con un término impulsor del lado derecho de la igualdad. Sin embargo, la Ec. (3.293) es más una *eigen* ecuación que una ecuación de Euler Bernoulli tal como éstas últimas de definen convencionalmente, pero la Ec. (3.293) posee soluciones resonantes conocidas en la mecánica cuántica. La Ec. (3.293) puede expresarse como:

$$(\nabla^2 + \kappa_1^2) \varphi = 0 \quad (3.294)$$

donde:

$$\kappa_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \quad (3.295)$$

y en el documento UFT226, publicado en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us) se utilizó en la teoría de reacciones nucleares de baja energía (RNBE). La Ec. (3.294) es conocida como ecuación del oscilador lineal, la cual puede utilizarse para definir la estructura del átomo y del núcleo. Puede transformarse en una ecuación de Euler Bernoulli como sigue:

$$(\nabla^2 + \kappa_1^2) \varphi = A \cos(\kappa_2 Z) \quad (3.296)$$

donde el término a la derecha de la igualdad representa un potencial del vacío. Es exactamente la estructura obtenida de la ley de Coulomb ECE, como ya se ha comentado.

### 3.4 La Ecuación de Beltrami para el Momento Lineal.

La ecuación de Schroedinger para la partícula libre puede obtenerse a partir de la ecuación de Beltrami para el momento:

$$\nabla \times \mathbf{p} = \kappa \mathbf{p} \quad (3.297)$$

la cual puede desarrollarse en la ecuación de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (3.298)$$

si se supone que:

$$\nabla \cdot \mathbf{p} = 0. \quad (3.299)$$

Si  $\mathbf{p}$  es un momento lineal en la clásica línea recta, entonces:

$$\kappa = 0. \quad (3.300)$$

Sin embargo, en general,  $\mathbf{p}$  posee intrincadas soluciones de Beltrami, algunas de las cuales han sido animadas en el documento UFT258, publicado en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us) y en su sección de animaciones.

Cuanticemos ahora la Ec. (3.298):

$$\mathbf{p}\psi = -i \hbar \nabla \psi \quad (3.301)$$

de manera que:

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \nabla \psi = \mathbf{0}. \quad (3.302)$$

Usamos:

$$\nabla^2 \nabla \psi = \nabla \nabla^2 \psi \quad (3.303)$$

y:

$$\nabla(\kappa^2 \psi) = \kappa^2 \nabla \psi \quad (3.304)$$

suponiendo que:

$$\nabla \kappa = \mathbf{0} \quad (3.305)$$

para llegar a:

$$\nabla ((\nabla^2 + \kappa^2) \psi) = 0. \quad (3.306)$$

Una posible solución es:

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \psi = 0 \quad (3.307)$$

que es la ecuación de Helmholtz para el escalar  $\psi$ , la función de onda de la mecánica cuántica. La ecuación de Schroedinger para una partícula libre se obtiene aplicando la Ec. (3.301) a:

$$E = p^2 / 2m \quad (3.308)$$

de manera que:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E\psi \quad (3.309)$$

y:

$$\left(\nabla^2 + \frac{2Em}{\hbar^2}\right) \psi = 0. \quad (3.310)$$

Las Ecs. (3.307) y (3.310) son la misma si:

$$\kappa^2 = \frac{2Em}{\hbar^2} \quad (3.311)$$

QED. Utilizando la relación de de Broglie:

$$\mathbf{p} = \hbar\boldsymbol{\kappa} \quad (3.312)$$

entonces:

$$p^2 = 2Em \quad (3.313)$$

que es la Ec. (3.308), QED. Por lo tanto, la ecuación de Schroedinger para la partícula libre es la ecuación de Beltrami:

$$\nabla \times \mathbf{p} = \left( \frac{2Em}{\hbar^2} \right)^{1/2} \mathbf{p} \quad (3.314)$$

con:

$$\mathbf{p}\psi = -i \hbar \nabla \psi. \quad (3.315)$$

La ecuación de Schroedinger para la partícula libre se origina en la ecuación de Beltrami. Este método puede extenderse a la ecuación general de Schroedinger, en la que la energía potencial  $V$  está presente. Consideremos la ecuación de Beltrami para el momento (3.297) en el caso general en donde  $\kappa$  depende de las coordenadas. Calculando el rotacional en ambos lados de la Ec. (3.297):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{p}) = \nabla \times (\kappa \mathbf{p}). \quad (3.316)$$

Por análisis vectorial, la Ec. (3.316) puede desarrollarse como:

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{p}) - \nabla^2 \mathbf{p} = \kappa^2 \mathbf{p} + \nabla \kappa \times \mathbf{p} \quad (3.317)$$

de manera que:

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \mathbf{p} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{p}) - \nabla \kappa \times \mathbf{p}. \quad (3.318)$$

Una posible solución es:

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (3.319)$$

y

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{p}) = \nabla \kappa \times \mathbf{p}. \quad (3.320)$$

La Ec. (3.320) implica

$$\mathbf{p} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \nabla \kappa \times \mathbf{p} = 0. \quad (3.321)$$

Dos posibles soluciones de la Ec. (3.321) son:

$$\nabla \cdot \mathbf{p} = 0 \quad (3.322)$$

y

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{0}. \quad (3.323)$$

Utilizando el postulado cuántico (3.301) en la Ec. (3.319) nos da:

$$\nabla^2 + \kappa^2 \nabla \psi = \mathbf{0} \quad (3.324)$$

y la ecuación de Schroedinger [1-10]:

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \psi = 0. \quad (3.325)$$

A partir de la Ec. (3.325)

$$\nabla ((\nabla^2 + \kappa^2) \psi) = \mathbf{0} \quad (3.326)$$

es decir

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \nabla \psi + (\nabla (\nabla^2 + \kappa^2)) \psi = \mathbf{0} , \quad (3.327)$$

una posible solución de la cual es:

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \nabla \psi = \mathbf{0} \quad (3.328)$$

y

$$(\nabla (\nabla^2 + \kappa^2)) \psi = \mathbf{0}. \quad (3.329)$$

La Ec. (3.329) es la Ec. (3.324), Q.E.D. La Ec. (3.329) puede expresarse como:

$$\nabla \nabla^2 \psi + \nabla \kappa^2 \psi = \mathbf{0} \quad (3.330)$$

es decir

$$\nabla (\nabla^2 \psi + \kappa^2) \psi = \mathbf{0}. \quad (3.331)$$

Una posible solución de la Ec. (3.331) es la ecuación de Schroedinger:

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \psi = 0. \quad (3.332)$$

De manera que la ecuación de Schroedinger es compatible con la Ec. (3.324).

La Ec. (3.322) nos da:

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (3.333)$$

que es consistente con la Ec. (3.332) solamente si:

$$\kappa^2 = 0. \quad (3.334)$$

La Ec. (3.323) nos da:

$$\nabla (\nabla^2 \psi) = \mathbf{0} \quad (3.335)$$

donde:

$$\nabla^2 \psi = -\kappa^2 \psi. \quad (3.336)$$

Por lo tanto:

$$\nabla (\kappa^2 \psi) = (\nabla \kappa^2) \psi + \kappa^2 \nabla \psi \quad (3.337)$$

y:

$$\nabla\psi = - \left( \frac{\nabla\kappa^2}{\kappa^2} \right) \psi. \quad (3.338)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla\psi = \nabla^2\psi &= - \nabla \cdot \left( \frac{\nabla\kappa^2}{\kappa^2} \psi \right) \\ &= - \left( \nabla \cdot \left( \frac{\nabla\kappa^2}{\kappa^2} \right) \right) \psi - \left( \frac{\nabla\kappa^2}{\kappa^2} \right) \nabla\psi. \end{aligned} \quad (3.339)$$

A partir de una comparación de las Ecs. (3.332) y (3.339) obtenemos la condición subsidiaria:

$$\nabla^2\kappa^2 = \kappa^4 \quad (3.340)$$

donde:

$$\kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V - E) . \quad (3.341)$$

Por lo tanto:

$$\nabla\kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \nabla V \quad (3.342)$$

y

$$\nabla^2\kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \nabla^2 V \quad (3.343)$$

dando una restricción cuadrática en  $V - E$ :



$$\nabla^2(V - E) = \frac{2m}{\hbar^2} (V - E)^2. \quad (3.344)$$

Esto puede expresarse como una ecuación cuadrática en  $E$ , que es una constante.  $E$  está expresada en términos de  $V$ ,  $\nabla V$ , y  $\nabla^2 V$ . Utilizando:

$$\nabla E = 0 \quad (3.345)$$

da una ecuación diferencial en  $V$  que puede resolverse numéricamente, dando una expresión para  $V$ . Finalmente esta expresión para  $V$  se utiliza en la ecuación de Schroedinger:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi = E\psi \quad (3.346)$$

para hallar los niveles de energía de  $E$  y las funciones de onda  $\psi$ . Estos son niveles de energía y funciones de onda de la estructura interna del partón de una partícula elemental tal como un electrón, protón o neutrón. Pueden emplearse los bien desarrollados métodos de mecánica cuántica computacionales para encontrar los valores esperados de cualquier propiedad y puede aplicarse la teoría de dispersión, en especial dispersión profunda inelástica electrón-electrón, electrón-protón y electrón-neutrón. Se afirma en forma convencional que los datos proporcionan evidencia para una estructura tipo quark, pero el modelo quark depende de la validez de los sectores  $U(1)$  y electro-débil del modelo establecido. En este libro estas teorías de sectores se refutan de muchas maneras.

### 3.5 Ejemplos de funciones de Beltrami.

En esta sección se incluyen algunos ejemplos de campos de Beltrami, con las gráficas correspondientes. Iniciamos la demostración con una consideración general. Marsh [28] define un campo de Beltrami general con geometría cilíndrica mediante

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_\theta(r) \\ B_z(r) \end{bmatrix} \quad (3.347)$$

con coordenadas cilíndricas  $r$ ,  $\theta$ ,  $Z$ . Hay sólo una dependencia respecto de  $r$  de los componentes del campo. Para que éste sea un campo de Beltrami, debe de cumplirse la condición de Beltrami en coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial B_Z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial B_r}{\partial Z} - \frac{\partial B_Z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r B_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \end{bmatrix} = \kappa \mathbf{B} \quad (3.348)$$

La divergencia en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(B_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(B_Z)}{\partial Z} \quad (3.349)$$

Obviamente, el campo (3.347) se encuentra libre de divergencia, lo cual constituye un prerequisite para ser un campo de Beltrami. La Ec.(3.348) se simplifica a

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\partial B_Z}{\partial r} \\ \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} B_\theta \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} 0 \\ B_\theta \\ B_Z \end{bmatrix}. \quad (3.350)$$

$\kappa$  puede ser una función en general. Aquí consideramos el caso de un valor constante de  $\kappa$ . A partir del segundo componente de la Ec.(3.350) resulta

$$-\frac{\partial}{\partial r} B_Z = \kappa B_\theta \quad (3.351)$$

y a partir del tercer componente

$$r \frac{\partial}{\partial r} B_\theta + B_\theta = \kappa r B_Z. \quad (3.352)$$

Integrando la Ec.(3.351), e insertando el resultado para  $B_Z$  en (3.352) nos da

$$\frac{\partial}{\partial r} B_\theta + \frac{1}{r} B_\theta = -\kappa^2 \int B_\theta dr, \quad (3.353)$$

y diferenciando esta ecuación conduce a la ecuación diferencial de segundo orden

$$r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} B_\theta + r \frac{\partial}{\partial r} B_\theta + \kappa^2 r^2 B_\theta - B_\theta = 0. \quad (3.354)$$

Finalmente cambiamos la variable  $r$  a  $\kappa r$ , lo cual conduce a la ecuación diferencial de Bessel

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} B_\theta(\kappa r) + r \frac{d}{dr} B_\theta(\kappa r) + (\kappa^2 r^2 - 1) B_\theta(\kappa r) = 0. \quad (3.355)$$

La solución es la función de Bessel

$$B_\theta(r) = B_0 J_1(\kappa r) \quad (3.356)$$

(con un valor constante de  $B_0$ ) y a partir de la Ec. (3.351) resulta

$$B_z(r) = B_0 J_0(\kappa r). \quad (3.357)$$

Esta es la conocida solución de Reed/Marsh, escalada por el número de onda  $\kappa$ , con componentes longitudinales. Esta solución se representa gráficamente en la Fig. 3.1. Las líneas de flujo se ven en la Fig. 3.2. Debe de tomarse en cuenta que las líneas de flujo muestran cómo se mueve una partícula de prueba en el campo vectorial que se considera un campo de velocidad:

$$\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \Delta t. \quad (3.358)$$

Todos los ejemplos de líneas de flujo se inician con nueve puntos en paralelo sobre el eje X, de manera que todas las animaciones debieran de ser comparables. El campo general de Beltrami puede expresarse como

$$\mathbf{v} = \kappa \nabla \times (\psi \mathbf{a}) + \nabla \times \nabla \times (\psi \mathbf{a}) \quad (3.359)$$

donde  $\psi$  es una función arbitraria,  $\kappa$  es una constante y  $\mathbf{a}$  es un vector constante. En la Fig. 3.3 se muestra un ejemplo con

$$\psi = \frac{1}{L^3} XYZ, \quad (3.360)$$

$$\mathbf{a} = [0, 0, 1]. \quad (3.361)$$

El campo es coplanar con el plano  $XY$ , y produce líneas de flujo planas de forma hiperbólica. Otra solución conocida, basada en funciones de Bessel, es la solución de Lundquist

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} J_1(\kappa r)\lambda e^{-\lambda Z} \\ J_1(\kappa r)\alpha e^{-\lambda Z} \\ J_1(\kappa r)e^{-\lambda Z} \end{bmatrix} \quad (3.362)$$

con

$$\kappa = \sqrt{\alpha^2 + \lambda^2} \quad (3.363)$$

y las constantes  $\alpha$  y  $\lambda$ . La función de Lundquist (para  $Z > 0$ ) se representa gráficamente en la Fig. 3.4, e inicialmente se comporta en forma similar al caso de Bessel comentado más arriba. Sin embargo, el campo se encoge con  $Z$  debido al factor exponencial. La Fig. 3.5 muestra una proyección sobre el plano  $XY$ . Los vectores siempre se rotan  $45^\circ$  en contra de la dirección radial. Las partes longitudinales no son visibles aquí, tal como se comentó para el caso Rodríguez-Vaz. Las líneas de flujo exteriores (Fig. 3.6) descienden a la región  $Z < 0$ , y aquí el factor exponencial  $\exp(-\lambda Z)$  da un crecimiento aneponencial. Esto es fácilmente reconocible en la segunda versión de esta animación en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us). El valor de  $\lambda$  puede suponerse con valor complejo, tal como lo discute Reed, lo cual conduce a soluciones oscilatorias, pero entonces pueden surgir problemas en otras partes de la definición del campo.

Finalmente se incluyen algunos ejemplos gráficos para ondas planas. Aun cuando estas son conocidas, resulta de utilidad recordar algunas características que no siempre se consideran donde se utilizan ondas planas. En la teoría ECE, su aparición más prominente es en el potencial vectorial del campo electromagnético libre, en coordenadas cartesianas cíclicas.

$$\mathbf{A}_1 = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{i(\omega t - \kappa Z)} \\ -i e^{i(\omega t - \kappa Z)} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{i(\omega t - \kappa Z)} \\ i e^{i(\omega t - \kappa Z)} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = 0. \quad (3.364)$$

Su divergencia es cero, y el *eigen* valor del operador rotacional es  $\kappa$  ó  $-\kappa$ , respectivamente. La onda plana también puede definirse como con valor real:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos(\omega t - \kappa Z) \\ -\sin(\omega t - \kappa Z) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin(\omega t - \kappa Z) \\ \cos(\omega t - \kappa Z) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = 0 \quad (3.365)$$

y son también campos de Beltrami, sin embargo, con *eigen* valores positivos para  $\mathbf{A}^1$  y  $\mathbf{A}^2$ . Las ondas planas con valores reales se grafican como campos vectoriales en la Fig. 3.7 para un instante fijo en el tiempo  $t = 0$ .  $\mathbf{A}^1$  y  $\mathbf{A}^2$  son perpendiculares entre sí, y definen un marco en rotación en la dirección  $Z$ . Las líneas de flujo en un plano son todas líneas rectas y paralelas. Para mostrar una variación se han graficado en la Fig. 3.8 para diferentes puntos de inicio sobre el eje  $Z$ . Aquí puede observarse nuevamente la rotación de marcos. Las líneas de flujo de ondas planas no son muy instructivas en cuanto al significado físico de estas ondas. Resulta más ilustrativo mostrar su comportamiento a través del tiempo. Comenzamos con líneas de flujo en el plano  $XY$  y calculamos su evolución a través del tiempo. Las líneas de flujo permanecían en dicho plano, de manera que agregamos un componente  $Z$  como  $vt$  para estimular una propagación en esa dirección, como es el caso para ondas electromagnéticas con  $v = c$ . Así, en la Fig. 3.9 se obtiene la traza de las ondas con polarización circular. Resulta interesante observar que las ondas están desplazadas en fase, aun cuando todos los puntos iniciales están en  $Y = 0$ . En este documento estamos considerando ondas planas en el contexto de campos de Beltrami. Los resultados de los cálculos señalan que los campos  $E$ ,  $B$  y  $A$  son paralelos. Por lo tanto, los componentes  $\mathbf{A}^1$  y  $\mathbf{A}^2$  no demuestran el comportamiento de campos eléctricos y magnéticos correspondientes a campos electromagnéticos transversales ordinarios, los cuales tienen un desplazamiento de fase de  $90^\circ$ . Reed [27] brinda una muy buena explicación de este caso extraordinario:

*Cada solución de onda plana corresponde a dos ondas con polarización circular que se propagan en forma opuesta entre sí, y combinándose para formar una onda estática. Esta onda estática no posee la característica típica de flujo de energía de las ondas con polarización lineal o circular con  $E \perp B$ , ya que los vectores de Poynting combinados de las ondas con polarización circular se cancelan entre sí, de una manera similar a la situación que encontramos previamente, en conexión con filamentos de un vórtice de plasma de Beltrami. Esencialmente, la combinación de estas dos ondas produce una onda estática que propaga helicidad magnética distinta de cero. En el libro de Marsh [28] se muestra la relación entre la helicidad y las densidades de energía también para esta onda, como el muy interesante hecho de que cualquier solución magnetostática a las ecuaciones de FFMF puede utilizarse para construir una solución para las ecuaciones de Maxwell con  $E \parallel B$ .*

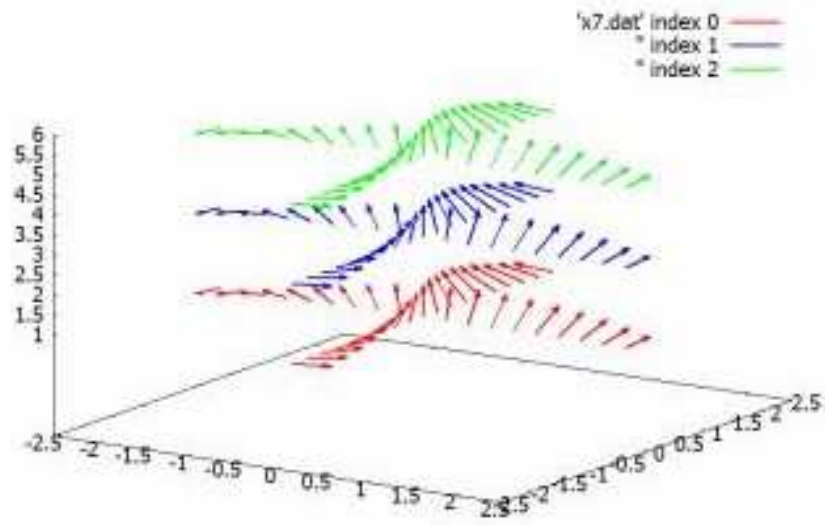


Figura 3.1: Solución de función de Bessel.

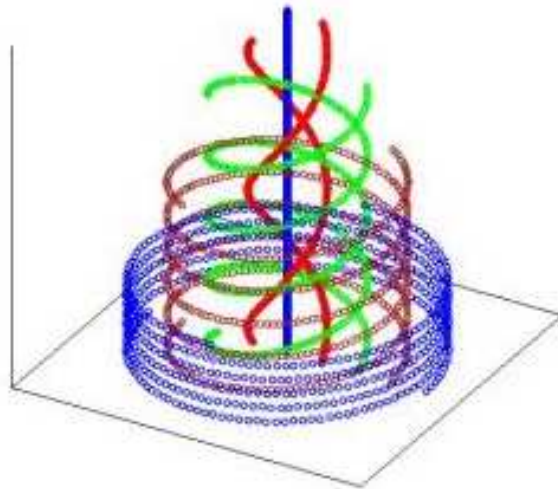


Figura 3.2: Líneas de flujo de la solución con funciones de Bessel.

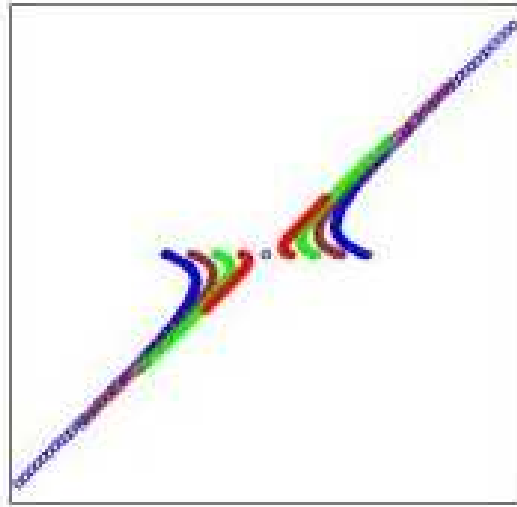


Figura 3.3: Solución general con  $\psi = \frac{1}{L^3} XYZ$ .

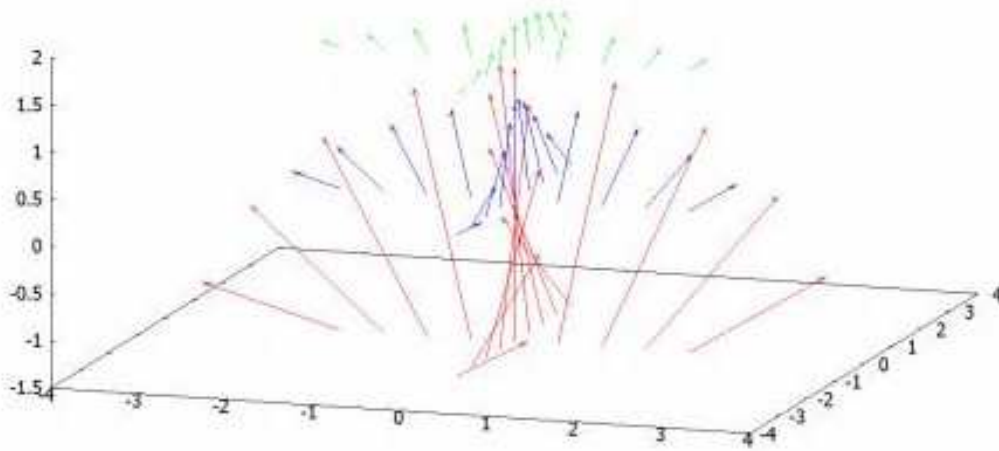


Figura 3.4: Solución de Lundquist.

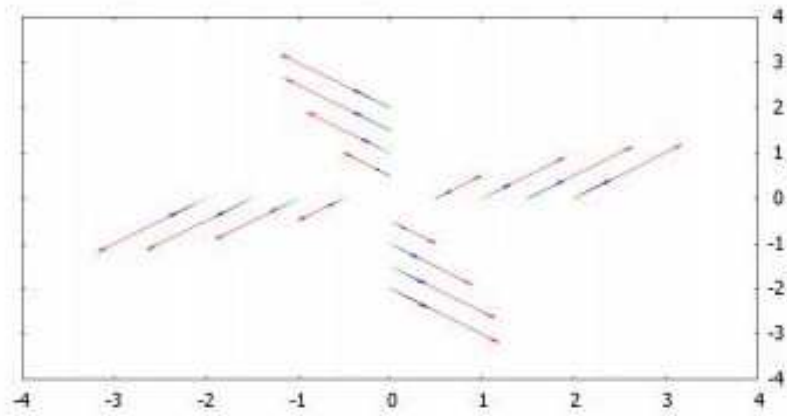


Figura 3.5: Solución de Lundquist, proyectada sobre el plano  $XY$ .

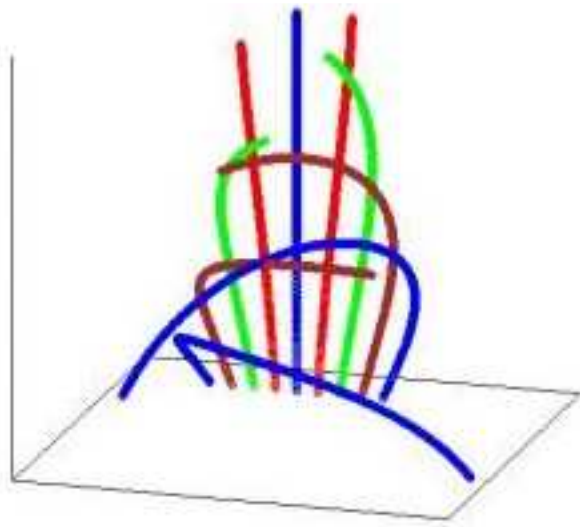


Figura 3.6: Líneas de flujo de la solución de Lundquist.



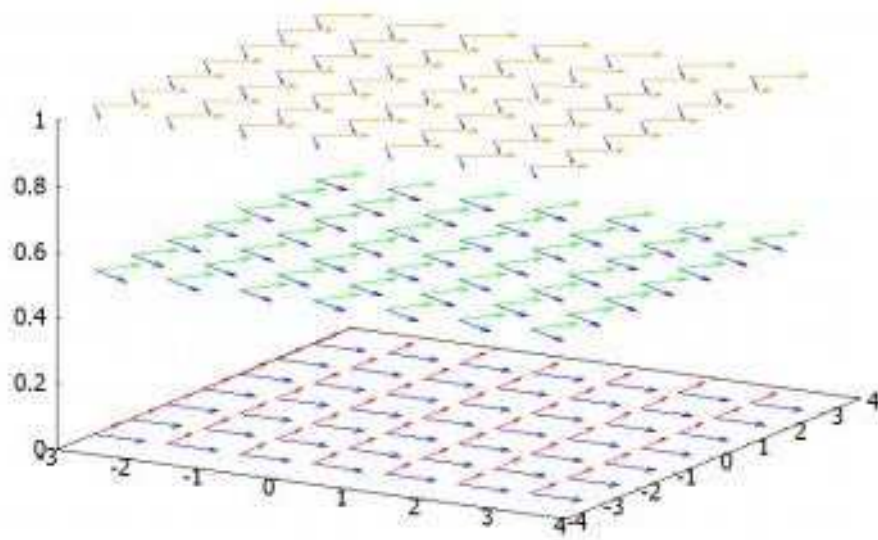


Figura 3.7: Campo de ondas planas,  $A_1$  y  $A_2$ .

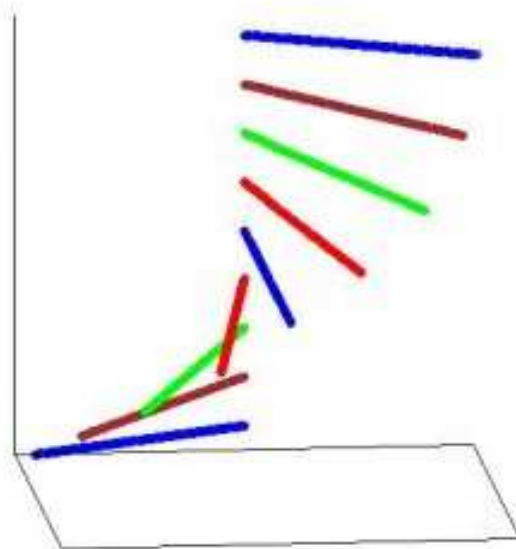


Figura 3.8: Líneas de flujo de ondas planas.

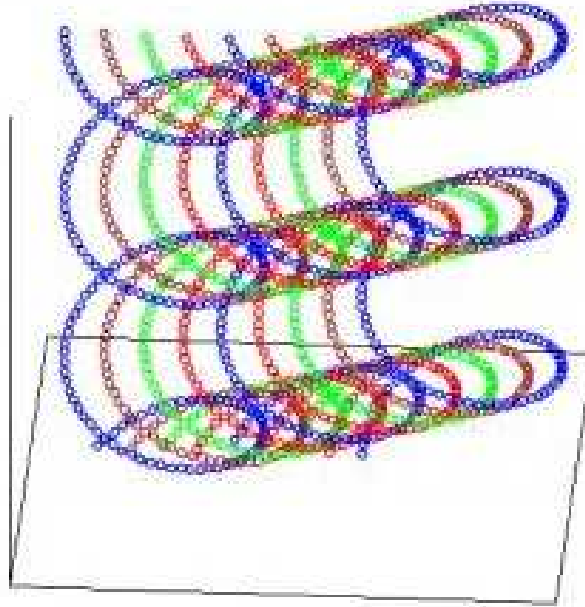


Figura 3.9: Evolución temporal de puntos transportados por ondas planas.

### 3.6 Estructura de Partones de las Partículas Elementales.

Desarrollamos una solución de la ecuación restrictiva de Schroedinger (3.346) en base a las ecuaciones de Beltrami desarrolladas en este capítulo. La solución se aplica a partículas elementales y revela su así llamada estructura de *partones*.

#### Solución de la ecuación restrictiva (3.340)

Antes de resolver la ecuación de Schroedinger (3.346), se obtiene el potencial a partir de la ecuación restrictiva (3.340) ó (3.344), respectivamente. Seleccionamos la forma (3.340) para  $\kappa^2$ , que se cumple para todas las energías  $E$ , de manera que una solución de la Ec. (3.340) es universal en  $E$ . Para el electrón se sabe que no hay dependencia angular de la densidad de carga de partícula. Para el protón hay solamente una débil dependencia angular. Por lo tanto, restringimos el operador  $\nabla^2$  en la Ec. (3.340) a la parte radial, dando

$$\frac{d^2}{dr^2} \kappa^2(r) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \kappa^2(r) = \kappa^4(r) \quad (3.366)$$

con

$$\kappa^2 = \frac{2m(V-E)}{\hbar^2} \quad (3.367)$$

como antes. Cuando se conoce  $\kappa^2$ , el potencial puede obtenerse mediante

$$V = E + \frac{\kappa^2 \hbar^2}{2m}. \quad (3.368)$$

Con el objeto de simplificar la Ec.(3.366) sustituimos  $\kappa$  por una nueva función  $\lambda$ :

$$\lambda^2(r) := r \kappa^2(r). \quad (3.369)$$

Este es el mismo procedimiento que el de librarse de la primera derivada en el procedimiento de la solución tradicional para la ecuación radial de Schroedinger. La Ec.(3.366) queda entonces como:

$$\frac{d^2}{dr^2} \lambda^2(r) = \frac{\lambda^4(r)}{r}. \quad (3.370)$$

Las condiciones iniciales deben de seleccionarse como sigue. Debido a que la coordenada radial en la Ec. (3.369) comienza en  $r = 0$ , debemos de utilizar  $\lambda^2(0) = 0$  para ser consistentes. La derivada de  $\lambda^2$  se obtiene a partir de la Ec. (3.369):

$$\frac{d\lambda^2}{dr} = \kappa^2 + 2r \frac{d\kappa}{dr}. \quad (3.371)$$

Solamente el primer término contribuye para  $r = 0$ , de manera que el valor inicial de  $\kappa^2$  determina la derivada de  $\lambda^2$  en este punto. En total:

$$\lambda^2(0) = 0, \quad (3.372)$$

$$\frac{d\lambda^2}{dr}(0) = \kappa^2(0). \quad (3.373)$$

Si  $\kappa^2(0)$  es positivo, obtenemos solamente funciones con curvatura positiva para  $\lambda^2$  y  $\kappa^2$ , véase la Fig. 3.10. La función de potencial es siempre positiva y mayor que cero, permitiendo que no haya estados linderos. Ambas funciones divergen para grandes valores de  $r$ . Por lo tanto, debemos comenzar con un valor negativo de  $\kappa^2(0)$ . Luego obtenemos una región negativa de la función potencial, comenzando con una tangente horizontal. Esto es igual que con el potencial de Woods Saxon, un potencial modelo para núcleos atómicos. No hay singularidad en el origen porque no hay carga puntual.

Estudios numéricos dan el resultado de que las soluciones  $\lambda^2$  y  $\kappa^2$  son siempre del tipo mostrado en la Fig. 3.11. La escala radial se determina por la profundidad del valor inicial  $\kappa^2(0)$ . Hemos seleccionado este valor tan grande para que la escala radial (en unidades atómicas) se encuentre en el rango de los radios de las partículas elementales, véase la Tabla 3.1. Como artefacto, el comportamiento divergente para  $r \rightarrow \infty$  hallado previamente se mantiene para valores iniciales negativos de la función de potencial. Obviamente,  $\kappa^2$  atraviesa el valor de cero cuando la derivada de  $\lambda^2$  presenta una tangente horizontal (Fig. 3.11). Sería conveniente cortar el potencial para este valor de radio.

### Solución de la ecuación radial de Schroedinger

Luego de haber determinado la función potencial  $\kappa^2$  que depende internamente de  $E$ , podemos resolver la ecuación radial de Schroedinger obtenida a partir de la Ec.(3.346):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} R(r) - \frac{\hbar^2}{mr} \frac{d}{dr} R(r) + V(r) R(r) = E R(r) \quad (3.374)$$

donde  $R$  es la parte radial de la función de onda. Sustituimos  $R$  en la forma habitual:

$$P(r) := r R(r) \quad (3.375)$$

para obtener la ecuación simplificada

$$\frac{d^2}{dr^2} P(r) = \frac{2m}{\hbar^2} (V(r) - E) P(r). \quad (3.376)$$

$V - E$  puede sustituirse por  $\kappa^2$ , que ya se conoce a partir de la ecuación restrictiva, de manera que tenemos

$$\frac{d^2}{dr^2} P(r) = \frac{\lambda^2}{r} P(r) = \kappa^2 P(r). \quad (3.377)$$

Obviamente, el parámetro de energía  $E$  es sub-sumado por  $\kappa$ . La función  $\kappa$  computada resulta válida para un valor arbitrario de  $E$ . Dado que el lado izquierdo de la Ec.(3.377) es una sustitución del operador  $\nabla^2$ , la ecuación de Schroedinger se ha transformado en una ecuación de Beltrami con una función escalar variable  $\kappa^2$  (suponiendo que no hay divergencia para  $P$ ). No queda ninguna dependencia respecto de la energía, y la ecuación puede resolverse como una ecuación diferencial ordinaria. Esta es una ecuación lineal en  $P$ , de manera que el resultado puede normalizarse arbitrariamente, como así también el resultado final  $R$ . Esto es lo mismo nuevamente que en el procedimiento de solución de la ecuación de Schroedinger. Respecto de las condiciones iniciales,  $P$  comienza con un valor de cero, tal como se discutió más arriba, y su derivada puede seleccionarse arbitrariamente, por ejemplo:

$$P(0) = 0, \quad (3.378)$$

$$\frac{dP}{dr}(0) = 1. \quad (3.379)$$

Los resultados para  $R$ ,  $R^2$  y  $R^2 r^2$  se han representado gráficamente en la Fig. 3.12. Nuevamente, las funciones deben de cortarse en el radio de corte de aproximadamente  $2 \cdot 10^{-5}$  u.a.

### Comparación con los resultados experimentales.

Los valores experimentales para los radios de las partículas se incluyen en la Tabla 3.1. El clásico radio del electrón se calcula igualando la energía de la masa con la energía electrostática en una esfera, y resulta ser, sencillamente

$$r_e = \alpha^2 a_0 \quad (3.380)$$

con  $\alpha$  siendo la constante de estructura fina y  $a_0$  el radio de Bohr. Este valor de radio, sin embargo, es mayor que el radio del protón. Por lo tanto, un procedimiento de cálculo más realista pareciera ser el escalamiento del radio del protón con la razón de masas comparado con el electrón (segunda fila en la Tabla 3.1). Los límites experimentales son aún más pequeños, de manera que la opinión aceptada es que el electrón es una partícula puntual, lo

cual no puede ser el caso en el sentido matemático, ya que no existen las singularidades en la naturaleza. Las características de densidad de carga del protón y del neutrón son funciones exponencialmente decrecientes. Esto no es totalmente idéntico a las propiedades obtenidas para  $R^2$  a partir de nuestro cálculo (Fig. 3.13), que se parece más a una función gaussiana. Sin embargo, se han observado gaussianas para núcleos atómicos que contienen más de un protón o neutrón. Hay un diagrama en la literatura que muestra las densidades de carga para el protón y neutrón [30] (replicada en la Fig. 3.14). Las densidades de carga comienzan con valores iguales a cero, por lo que parecen describir la carga efectiva en una esfera de radio  $r$  que debe de compararse con

$$\rho_e = R^2 \cdot r^2 \quad (3.381)$$

de nuestro cálculo. Esta función (con signo negativo) se ha representado gráficamente en la Fig. 3.13 en el rango por debajo del radio de corte. Dado que nuestra función no está normalizada, difieren las escalas verticales. El protón muestra un hombro en la densidad de carga, que no es reproducido en nuestro cálculo. Se sabe que el neutrón no es neutro de carga a través de su radio, sino que posee un núcleo positivo y una región externa negativa. La región negativa, que se llama “concha” incluso pertenece al centro en la Fig. 3.14. La forma de la concha se ajusta bastante a nuestro cálculo en la Fig. 3.13. Algunas otras densidades de carga del protón han sido calculadas por Venkat et al. [29] y por Sardin [30], ver en la Fig.4. Se comparan bastante bien con nuestros resultados para  $R^2 r^2$ , la Fig. 3.13 de este documento. Tal como ya se ha mencionado, nuestro cálculo no contiene un parámetro explícito de energía, de manera que no obtenemos un espectro de masa de partículas elementales o partones. El diámetro de la carga efectiva se define a través del valor inicial de  $\kappa^2$ . Para los resultados presentados debimos elegir  $\kappa^2 = -5 \cdot 10^{10}$  u.a., lo cual es mucho. La energía en reposo del protón es 938 MeV ó  $3.5 \cdot 10^7$  u.a., que es tres órdenes de magnitud menos. Obviamente, el potencial tiene que ser mucho más profundo que la energía en reposo (negativa). En conclusión, el enfoque de Beltrami de la teoría ECE conduce a una descripción cualitativamente correcta de la estructura interna de partículas elementales, en particular del neutrón. La energía de unión no puede determinarse debido a que se cancela durante el transcurso del cálculo. Pareciera que la estructura de Beltrami no es válida en la región de contorno de las partículas elementales o partones, ya que la densidad de carga no cae asintóticamente a cero. Esto puede remediarse mediante la definición de un radio de corte en donde la función radial presenta un cruce del valor igual a cero. Este fue un primer enfoque para el cálculo del interior de las partículas elementales (la así-llamada estructura de partón) mediante la teoría ECE. Para futuros desarrollos va a ser necesario encontrar enfoques más elaborados.

| Partícula                        | característica de densidad de carga | radio [m]             | radio [u.a.]         |
|----------------------------------|-------------------------------------|-----------------------|----------------------|
| electrón (clásico)               | función delta                       | $2.82 \cdot 10^{-15}$ | $5.33 \cdot 10^{-5}$ |
| electrón (derivado) <sup>a</sup> | función delta                       | $9.1 \cdot 10^{-17}$  | $1.72 \cdot 10^{-6}$ |
| protón (medido)                  | func. exponencial negat.            | $1.11 \cdot 10^{-15}$ | $2.10 \cdot 10^{-5}$ |
| protón (radio de carga)          | func. exponencial negat.            | $8.8 \cdot 10^{-16}$  | $1.66 \cdot 10^{-5}$ |
| neutrón (medido)                 | func. exponencial negat.            | $1.7 \cdot 10^{-15}$  | $3.21 \cdot 10^{-5}$ |
| núcleos atómicos                 | func. gaussiana o de Fermi          | $2-8 \cdot 10^{-15}$  | $4-15 \cdot 10^{-5}$ |

<sup>a</sup>Radio del electrón a partir de comparación de volumen con  $(m_{\text{protón}}/m_{\text{electrón}})^{1/3}$

Tabla 3.1: Datos experimentales de partículas elementales [29], [30].

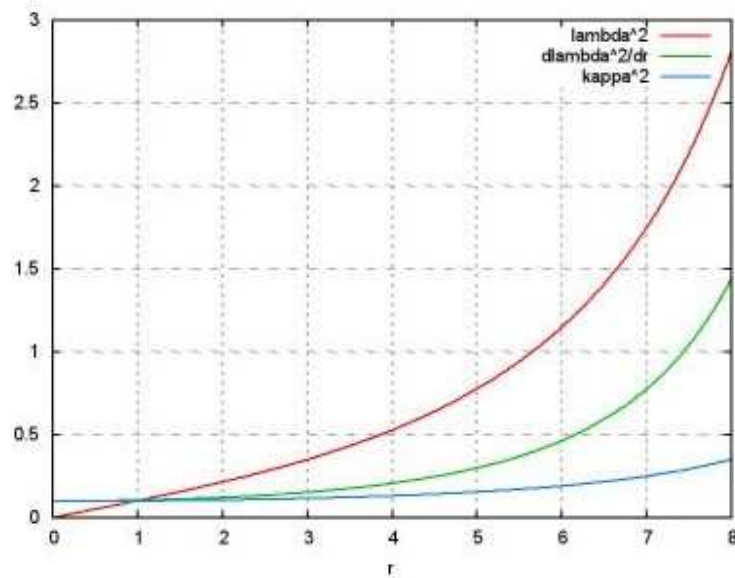


Figura 3.10: Funciones de solución de la ecuación restrictiva (3.340) para  $\kappa^2(0) > 0$ .

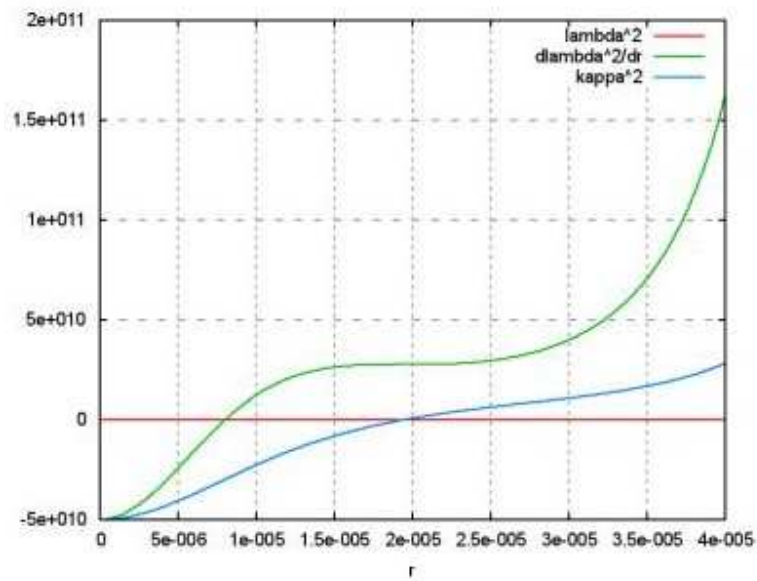


Figura 3.11: Funciones de solución de la ecuación restrictiva (3.340) para  $\kappa^2(0) < 0$ .

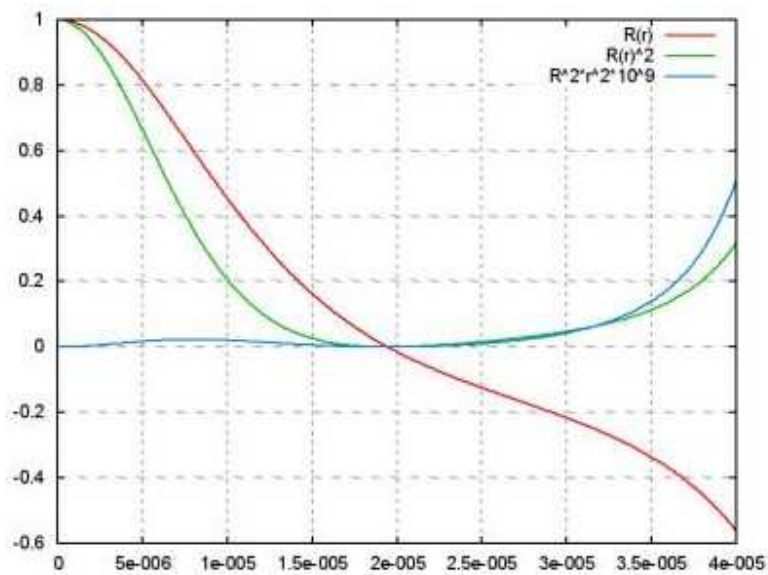


Figura 3.12: Solución de partón de la ecuación de Schrodinger.



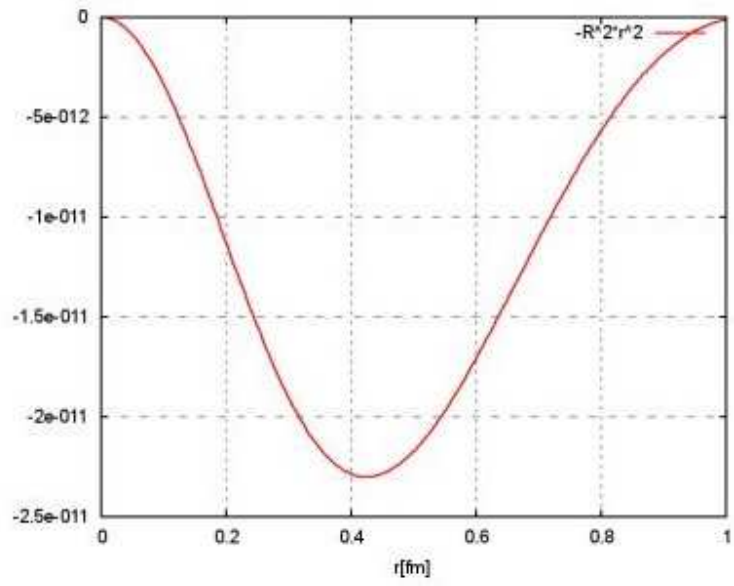


Figura 3.13: Ecuación de onda radial  $-R^2 \cdot r^2$ .

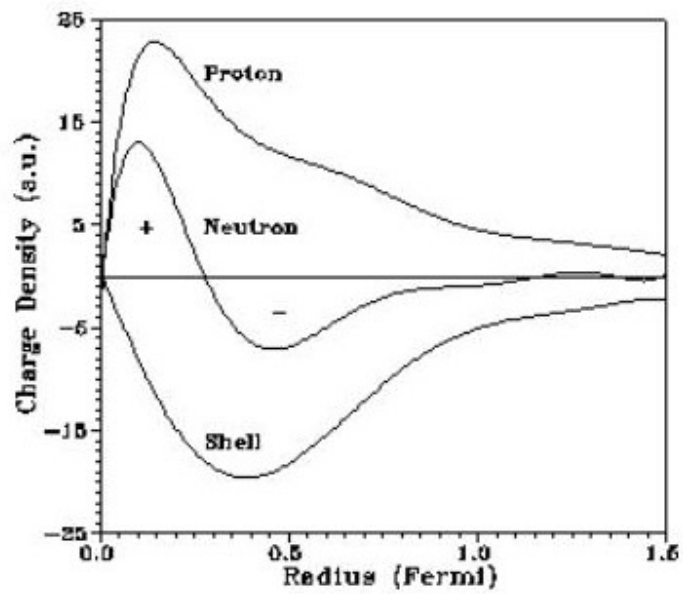


Figura 3.14: Densidades de carga experimentales de partículas elementales [30].